Musterlösung — DGL f. Ing., 25. Juli 2014

1. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben ist die DGL

$$y''(t) - 10y'(t) + 25y(t) = 25t + 15 - 2e^{5t}.$$

a) Das charakteristische Polynom berechnet sich zu $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$. Nach dem Exponentialansatz hat man das Fundamentalsystem e^{5t}, te^{5t}.

b) Da die rechte Seite die Summe eines Polynoms ersten Grades und einer Exponentialfunktion ist, setzen wir beim Ansatz der rechten Seite für eine partikuläre Lösung $y_p(t)$ auch die Summe eines Polynoms ersten Grades und einer Funktion $u(t)e^{5t}$ an:

$$y_{p,1}(t) = at + b, \quad y_{p,2}(t) = u(t)e^{5t}, \quad y_p(t) = at + b + u(t)e^{5t}.$$

Dann ist

$$y'_{p,1}(t) = a, \qquad y''_{p,1}(t) = 0.$$

Eingesetzt in die DGL ergibt dies

$$25t + 15 = -10a + 25(at + b) = 25at - 10a + 25b.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$25 = 25a, \qquad 15 = -10a + 25b.$$

Damit ist $a = b = 1$, also

$$y_{p,1}(t) = t + 1.$$

weiter ist

$$y'_{p,2}(t) = u'(t)e^{5t} + 5u(t)e^{5t}, \qquad y''_{p,2}(t) = u''(t) + 10u'(t)e^{5t} + 25u(t)e^{5t}.$$

Dann ist

$$-2e^{5t} = u''(t)e^{5t} + 10u'(t)e^{5t} + 25u(t)e^{5t} - 10(u'(t)e^{5t} + 5u(t)e^{5t}) + 25u(t)e^{5t} = u''(t)e^{5t},$$

also $u''(t) = -2$, damit also z.B. $u(t) = -t^2$. Insgesamt ist

$$y_p(t) = t + 1 - t^2e^{5t}.$$

c) Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist

$$x(t) = t + 1 - t^2e^{5t} + c_1e^{5t} + c_2te^{5t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Seien $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) := 3t$, $g(t) := e^{3t}$. Nach dem Faltungssatz ist

$$Ł[f * g(t)](s) = Ł[f(t)](s)Ł[g(t)](s).$$

Mit $Ł[f(t)](s) = \frac{3}{s^2}$ und $Ł[g(t)](s) = \frac{1}{s-3}$ ist also:

$$Ł[f * g(t)](s) = \frac{3}{s^2(s-3)}.$$

Nach allgemeinem Ansatz existieren $A, B, C \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\frac{3}{s^2(s-3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-3}.$$

Also gilt

$$\frac{3}{s^2(s-3)} = \frac{As(s-3) + B(s-3) + Cs^2}{s^2(s-3)} = \frac{(A+C)s^2 + s(B-3A) - 3B}{s^2(s-3)}.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$A + C = 0, \qquad B - 3A = 0, \qquad -3B = 3.$$

Damit ist $B = -1$, $A = -\frac{1}{3}$ und $C = \frac{1}{3}$. Es ergibt sich also

$$Ł[f * g(t)](s) = -\frac{1}{3s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{3(s-3)}.$$

Es ist $Ł[-\frac{1}{3}](s) = -\frac{1}{3s}$, $Ł[-t](s) = -\frac{1}{s^2}$ und $Ł[\frac{e^{3t}}{3}](s) = \frac{1}{3(s-3)}$. Nach Satz von Lerch ist dann

$$f * g(t) = -\frac{1}{3} - t + \frac{e^{3t}}{3}.$$

3. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben sei das AWP (*) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + u$, $u(x,0) = 3\mathrm{e}^{4x} + e^{-x} + 2e^{-9x}$.

a) Mit $u(x,t) = X(x)T(t)$ muss also gelten

$$X(x)T'(t) = X'(x)T(t) + X(x)T(t),$$

und Teilen durch $X(x)T(t)$ ergibt die äq. Gleichung (für $X(x)T(t) \neq 0$)

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X'(x)}{X(x)} + 1.$$

Da beide Seiten nur von jeweils einer Variable abhängig sind, muss ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren so, dass

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X'(x)}{X(x)} + 1 = \lambda.$$

Es ergeben sich also die Differentialgleichungen

$$T'(t) = \lambda T(t), \qquad X'(x) = (\lambda - 1)X(x).$$

Damit ist

$$T(t) = e^{\lambda t}, \qquad X(x) = e^{(\lambda-1)x}, \qquad u_\lambda(x,t) = e^{\lambda t + (\lambda-1)x}$$

bzw. mit Superposition

$$u(x,t) = \sum_\lambda C_\lambda e^{\lambda t + (\lambda-1)x}.$$

Dann ist mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sum_\lambda C_\lambda e^{(\lambda-1)x} = 3\mathrm{e}^{4x} + e^{-x} + 2e^{-9x},$$

folglich $C_5 = 3$, $C_0 = 1$ und $C_{-8} = 2$. Es ergibt sich die Lösung

$$u(x,t) = 3e^{5t+4x} + e^{-x} + 2e^{-8t-9x}.$$

b) Mit dem Summenansatz $u(x,t) = X(x) + T(t)$ ist $\frac{\partial u}{\partial t} = T'(t)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)$, $T'(T) = X'(x) + X(x) + T(t)$. Dann muss ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren so, dass

$$T'(T) - T(t) = X'(x) + X(x) = \lambda.$$

Es ergeben sich die DGLen $T'(T) = T(t) + \lambda$, $X'(x) = -X(x) + \lambda$. Damit ist $T(t) = C_1 e^t - \lambda$, $X(x) = C_2 e^{-x} + \lambda$, $u(x,t) = C_2 e^{-x} + C_1 e^t$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

4. Aufgabe

14 Punkte

Gegeben sei das nichtlineare System von DGLen $\dot{x} = 4x - xy - 2x^2$, $\dot{y} = -y + xy$.

a) Wir erhalten das Gleichungssystem für einen Gleichgewichtspunkt (x^*, y^*):

$$\begin{array}{rcl} I: \quad 0 & = & x^*(4 - y^* - 2x^*), \\ II: \quad 0 & = & y^*(x^* - 1). \end{array}$$

Wir machen eine Fallunterscheidung nach II.
Fall 1: $y^* = 1$. Damit die erste Gleichung auch erfüllt ist, muss $x^* = 0$ sein oder $x^* = 0$, Es ergeben sich die GGP $(0,0)$ und $(2,0)$.
Fall 2: $x^* = 1$. Dann ist $y^* = 2$ und $(1,2)$ ein GGP.

b) Sei $\vec{F}(x,y) := \begin{pmatrix} 4x - xy - 2x^2 \\ -y + xy \end{pmatrix}$. Dann ist die Jacobi-Matrix

$$J_{\vec{F}}(x,y) = \begin{pmatrix} 4 - y - 4x & -x \\ y & -1 + x \end{pmatrix}.$$

Im GGP $(0,0)$ ist

$$J_{\vec{F}}(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da ein Eigenwert 4 und damit positiv ist, liegt Instabilität vor. Im GGP $(2,0)$ ist

$$J_{\vec{F}}(2,0) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom berechnet sich zu $(x+4)(x-1)$. Da ein Eigenwert positiv ist, liegt Instabilität vor. Im GGP $(1,2)$ ist

$$J_{\vec{F}}(1,2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom berechnet sich zu

$$\det \begin{pmatrix} x+2 & 1 \\ -2 & x \end{pmatrix} = (x+2)x + 2 = x^2 + 2x + 2.$$

Dieses Polynom hat die Nullstellen $-1+i$ und $-1-i$. Da beide Eigenwerte von $J_{\vec{F}}(1,2)$ also negativen Realteil haben, ist der GGP $(1,2)$ asymptotisch stabil.

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die DGL zweiter Ordnung $y''(t) + y(t) = 0$.

a) Mit $u := y'$ ist $u' = y'' = -y$, also

$$\begin{pmatrix} y' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Also ist $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert i.

c) Da A eine reelle Matrix ist, ist wegen a) der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $-i$. Wir erhalten das komplexe Fundamentalsystem

$$\vec{z}_1(t) = e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \vec{z}_2(t) = e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Ein reelles Fundamentalsystem setzt sich zusammen aus Real- und Imaginärteil von $z_1(t)$. Es ist

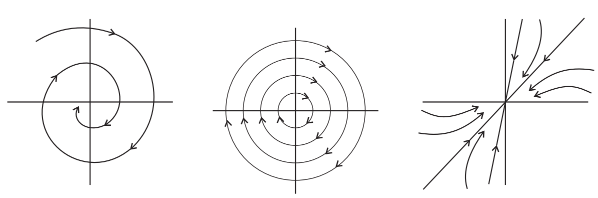
$$\vec{z}_1(t) = e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = (\cos t + i \sin t) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \left(\sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Damit ist ein reelles Fundamentalsystem gegeben durch

$$\vec{x}_1(t) = \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2(t) = \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d) Portrait B, da die Eigenwerte rein imaginär sind.



(A) (B) (C)

6. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben sei das System von DGLn

$$\dot{x} = 2y, \qquad \dot{y} = -x^2.$$

Wir machen den Summenansatz $E(x,y) = X(x) + Y(y)$. Sei $(x(t), y(t))^T$ eine Lösung des Systems. Dann muss gelten:

$$0 = X'(x)\dot{x} + Y'(y)\dot{y} = 2yX'(x) - x^2Y'(y),$$

also

$$x^2Y'(y) = 2yX'(x)$$

bzw.

$$\frac{1}{2y}Y'(y) = \frac{1}{x^2}X'(x).$$

Dann muss ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren so, dass

$$\frac{1}{2y}Y'(y) = \frac{1}{x^2}X'(x) = \lambda.$$

Es ergeben sich die Bedingungen

$$\begin{aligned} I: \quad Y'(y) &= 2\lambda y, \\ II: \quad X'(x) &= \lambda x^2. \end{aligned}$$

Also ist $Y(y) = \lambda y^2$, $X(x) = \frac{\lambda}{3}x^3$ eine mögliche Wahl. Dann ist zum Beispiel

$$E(x,y) = 3y^2 + x^3$$

eine Erhaltungsgröße.