Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 14/15
G. Penn-Karras 25. Februar 2015

Februar – Klausur
Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 9 Punkte

Ermitteln Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}$ der Differentialgleichung

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \vec{y}(t).$$

2. Aufgabe 10 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode der Laplace-Transformation die Lösung für das Anfangswertsproblem

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - 2x(t) = 6u_1(t), \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -2.$$

Dabei steht $u_1(t)$ für die Sprungfunktion, die bei $t = 1$ von Null auf Eins springt.

Hinweis: Die folgende Partialbruchzerlegung darf ohne Nachweis benutzt werden:

$$\frac{6}{s(s-1)(s+2)} = -\frac{3}{s} + \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+2}\ .$$

3. Aufgabe 11 Punkte

Gegeben ist das Randwertproblem

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + 5u(x,t) = 0 \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

a) Finden Sie alle Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$, wobei die Funktion $X(x)$ periodisch und nicht-konstant ist.

b) Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung, die die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 3\sin x + 4\sin 2x$$

erfüllt.

Hinweis: Konstruieren Sie Ihre Separationskonstante λ so, dass die DGL für X von der Form $X'' - \lambda X = 0$ ist.

Bitte 2. Blatt beachten!

Name: .... Matr.–Nr.: ....

Verständnisteil

4. Aufgabe 9 Punkte

Gegeben ist das Anfangswertsproblem im $\mathbb{R}^2$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^{-2} & -t^{-1} \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t > 0.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem bilden. (Vergessen Sie nicht den Nachweis, dass die Funktionen $\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_2(t)$ Lösungen des DGL-Systems sind.)

b) Ermitteln Sie die Lösung $\vec{x}(t)$ des Anfangswertsproblems.

5. Aufgabe 11 Punkte

Gegeben ist das reelle dynamische System

$$\dot{x} = (x-1)(x-y), \qquad \dot{y} = -(y-1)(x+y).$$

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen.

b) Für welche dieser Gleichgewichtslösungen kann mit dem Stabilitätssatz für den nichtlinearen Fall der Stabilitätscharakter (*asymptotisch stabil* oder *instabil*) ermittelt werden? Geben Sie bei diesen Gleichgewichtslösungen den Stabilitätscharakter an und begründen Sie Ihre Antwort.

Für Aufgabe 6 bitte wenden!

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Es gibt eine Lösung $y(x)$ der linearen Differentialgleichung $y'' - y = x\mathrm{e}^{-x}$, die die Form $y(x) = \mathrm{e}^{-x}(Ax^2 + Bx)$ mit gewissen Zahlen A und B hat.

b) Jedes dynamische System $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ mit einer quadratischen reellen konstanten Matrix A hat mindestens eine Gleichgewichtslösung.

c) Sind zwei reelle Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ stetig und beschränkt, so gilt die Gleichung $\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \cdot \mathcal{L}[g(t)](s)$.

d) Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

für eine reelle Funktion $u(x,t)$ wird durch $u(x,t) = \mathrm{e}^{x+t}$ gelöst.

e) Die Besselsche Differentialgleichung

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

ist eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung.