Musterlösung — DGL f. Ing., 25. Februar 2015

1. Aufgabe

9 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 6 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies 0 = (1-\lambda)^2(-3-\lambda) + 12(1-\lambda) - 8(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(-3-\lambda)+4\right] = (1-\lambda)\left[\lambda^2+2\lambda-3+4\right] = (1-\lambda)(\lambda+1)^2$$

ergeben sich der doppelte Eigenwert -1 und der einfache Eigenwert 1.

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist eindimensional:

$$\operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist eindimensional:

$$\operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

Beim Eigenwert -1 ist die algebraische Vielfachheit größer als die geometrische Vielfachheit.

Folglich ist ein weiterer, linear unabhängiger Hauptvektor h zum Eigenwert 1 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Durch Anschauen der 3. Spalte findet man als eine inhomogene Lösung:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Allgemein:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}$$

Für die allgemeine Lösung hat man also

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{-t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right), \; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C} \text{ (oder } \mathbb{R}).$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned}
s^2X - s + 2 + sX - 1 - 2X &= \frac{6\mathrm{e}^{-s}}{s} \\
(s^2 + s - 2)X - s + 1 &= \frac{6\mathrm{e}^{-s}}{s} \\
X &= \frac{s-1}{s^2+s-2} + \frac{6\mathrm{e}^{-s}}{s(s^2+s-2)}
\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegungen:

$$\frac{s-1}{s^2+s-2} = \frac{s-1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

und

$$\frac{6}{s(s^2+s-2)} = \frac{6}{s(s-1)(s+2)} = -\frac{3}{s} + \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+2} \quad \text{(Zuhaltemethode).}$$

Rücktransformation und Lösung:

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{1}{s+2} + \mathrm{e}^{-s}\left(-\frac{3}{s} + \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+2}\right) \\
&= \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-2t} + u_1(t)\left(-3 + 2\mathrm{e}^{t-1} + \mathrm{e}^{-2(t-1)}\right)\right](s)
\end{aligned}$$

mit Satz von Lerch

$$x(t) = \mathrm{e}^{-2t} + u_1(t)\left(-3 + 2\mathrm{e}^{t-1} + \mathrm{e}^{-2(t-1)}\right)$$

3. Aufgabe

11 Punkte

a) Partielle DGL ergibt: $X''(x)T(t) - X(x)T'(t) + 5X(x)T(t)$
Für $u(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{T'(t)}{T(t)} + 5 = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = \frac{T'(t)}{T(t)} - 5$$

DGLn in X und T:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) - (5 + \lambda)T(t) = 0.$$

Aus der Randbedingung

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

folgt mit $u(x,t) = X(x)T(t)$ die Aussage $X(0) = X(\pi) = 0$.
Für die DGL $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ kann es nicht-konstante periodische Lösungen nur für $\lambda < 0$ geben. Wir setzen $\sqrt{-\lambda} := \mu$. Dann ist

$$X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x, \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$
$$X(0) = C_1 = 0 \implies X(\pi) = C_2 \sin \mu\pi = 0$$
$$\implies C_2 = 0 \text{ oder } \sin \mu\pi = 0$$

Nicht-verschwindende Lösungen $X(x)$ gibt es für solche Werte von μ, die die Gleichung $\sin \mu\pi = 0$ erfüllen. μ muss gleich einer natürlichen Zahl n mit $n > 0$ sein. Damit ist λ gleich einer der Zahlen λ_n mit

$$\lambda_n = -n^2, \quad n \in \mathbb{N}, n > 0.$$

Für jede Wahl von n ergibt sich eine Lösung T_n für T

$$T_n(t) = \mathrm{e}^{(5+\lambda_n)t} = \mathrm{e}^{(5-n^2)t}$$

Für $u(x,t)$ hat man also die Funktionen $u_n(x,t)$ mit $n \in \mathbb{N}, n > 0$:

$$u_n(x,t) := \mathrm{e}^{(5-n^2)t} \sin nx.$$

gefunden.

b) Mit der Superposition

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{(5-n^2)t} \sin nx$$

sind Koeffizienten A_n zu suchen mit

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = 3\sin x + 4\sin 2x$$

also

$$A_1 = 3,\ A_2 = 4, \qquad A_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\};$$

Damit hat man für die gesuchte Lösung

$$u(x,t) = 3\mathrm{e}^{4t} \sin x + 4\mathrm{e}^{t} \sin 2x$$

4. Aufgabe

9 Punkte

a) Nachzuweisen ist, dass die angegebenen Funktionen $\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_2(t)$ das DGL-System lösen und linear unabhängig sind.

Es ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}_1(t) \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^{-2} & -t^{-1} \end{pmatrix} \vec{x}_1(t)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^{-2} & -t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}_2(t) \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^{-2} & -t^{-1} \end{pmatrix} \vec{x}_2(t)$$

$$\begin{pmatrix} -t^{-2} \\ 2t^{-3} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^{-2} & -t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} \\ -t^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^{-2} \\ 2t^{-3} \end{pmatrix}$$

Die angegebenen Funktionen lösen tatsächlich das vorgelegte DGL-System.

Mit dem Wronski-Test zeigt man die lineare Unabhängigkeit. Wir werten die Wronski-Determinante der Lösungen an der Stelle 1 aus und finden

$$\det \begin{pmatrix} t & t^{-1} \\ 1 & -t^{-2} \end{pmatrix}\Bigg|_{t=1} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

Damit sind die beiden Lösungen (für $t > 0$) linear unabhängig.

Die beiden Lösungen $\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_2(t)$ bilden damit ein Fundamentalsystem.

b) Es sind Konstanten C_1 und C_2 gesucht, so dass

$$\left(C_1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t^{-1} \\ -t^{-2} \end{pmatrix} \right)\Bigg|_{t=1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt. Man schreibt auch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Inversenbestimmung, Gauß-Schritte oder scharfes Hinsehen liefern $C_1 = 2$ und $C_2 = 1$. Somit ist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t + t^{-1} \\ 2 - t^{-2} \end{pmatrix}$$

die gewünschte Lösung.

5. Aufgabe

11 Punkte

a) Gleichgewichtslösungen (x^*, y^*) erfüllen

$$(x^* - 1)(x^* - y^*) = 0, \qquad -(y^* - 1)(x^* + y^*) = 0.$$

Damit sind $(1, 1)$, $(1, -1)$ und $(0, 0)$ drei Gleichgewichtslösungen.

b) Für die Jacobi-Matrix hat man

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y - 1 & -(x - 1) \\ -(y - 1) & -x - 2y + 1 \end{pmatrix}.$$

Für den GGP $(1, 1)$ ist

$$\mathcal{J}(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind gleich 0 und -2. Einer der Eigenwerte hat Realteil 0, der andere negativen Realteil. Mit dem genannten Stabilitätssatz kann über diesen GGP nicht entschieden werden.

Der GGP $(1, 1)$ ist instabil.

Für den GGP $(1, -1)$ ist

$$\mathcal{J}(1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Dreiecksmatrix hat den doppelten Eigenwert 2, dessen Realteil positiv ist. Mit dem genannten Stabilitätssatz kann hier entschieden werden: Der GGP $(1, -1)$ ist instabil.

Für den GGP $(0, 0)$ ist

$$\mathcal{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist gleich $(-1-\lambda)(1-\lambda)-1$, also gleich $\lambda^2 - 2$. Es hat die Nullstellen $\pm\sqrt{2}$. Mit dem genannten Stabilitätssatz kann hier entschieden werden: Der GGP $(0, 0)$ ist instabil.

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Wahr.
(Offenbar handelt es sich nicht um eine homogene Lösung, denn diese müsste eine Linearkombination von e^x und e^{-x} sein.)

Im *Ansatz der rechten Seite* hat man für das Polynom 1. Grades x als Erstansatz die Funktion $(Ax + B)\mathrm{e}^{-x}$. Weil der Koeffizient -1 im Exponenten eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, muss ein Resonanzfaktor x zusätzlich zum Erstansatz erscheinen. Es gibt Zahlen A und B, so dass die Funktion $\mathrm{e}^{-x}(Ax^2 + Bx)$ eine (partikuläre) Lösung der DGL $y'' - y = x\mathrm{e}^{-x}$ ist.

b) Wahr.
Wenigstens die Lösung $\vec{x}(t) = 0$ ist eine Gleichgewichtslösung des dynamischen Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, da diese Lösung die Bedingung $A\vec{x} = 0$ erfüllt.

c) Falsch.
Man wähle $f(t) = g(t) = 1$.
Einerseits $\mathcal{L}[1 \cdot 1](s) = \frac{1}{s}$, andererseits aber $\mathcal{L}[f(t)](s) \cdot \mathcal{L}[g(t)](s) = \frac{1}{s^2}$.
Widerspruch.

d) Wahr.
Sämtliche partiellen Ableitungen von e^{x+t} in jeder Ordnung sind gleich e^{x+t}. Damit wird die partielle Differentialgleichung erfüllt.

e) Falsch.
Die Funktion y und ihre Ableitungen kommen ausschließlich in 1. Potenz vor. Damit ist die Besselsche Differentialgleichung linear.