Rechenteil

1. Aufgabe

13 Punkte

a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = 3x^2 y + yx. \qquad \text{(3 Punkte)}$$

b) Finden Sie die Lösung des AWP

$$y' = \sin(2x)e^{-2y}, \qquad y(0) = 0$$

und geben Sie deren Definitionsbereich an. (5 Punkte)

c) Finden Sie die allgemeine reelle Lösung der DGL

$$y'' + y = \cos x.$$

Nutzen Sie dabei den Ansatz vom Typ der rechten Seite, um eine partikuläre Lösung zu finden. (5 Punkte)

Korrekturgrundlage (keine Musterlösung):

a) (3 Punkte) Lineare DGL $y' = (3x^2 + x)y$, also ergibt sich die Lösung durch integrieren:

$$y(x) = c\ e^{\int 3x^2 + x\ dx} = c\ e^{x^3 + \frac{1}{2}x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

b) (5 Punkte) Die DGL ist separiert $y' = f(x)g(y)$ mit $f(x) = \sin(2x)$, $g(y) = e^{-2y}$. Die Funktion g hat keine Nullstelle, sodass man einfach integrieren kann:

$$\frac{1}{2}e^{2y} = \int e^{2y} dy = \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Also ergibt sich zunächst $2y(x) = \ln(-\cos(2x) + 2c)$.
Die Anfangsbedingung ergibt dann $0 = 2y(0) = \ln(-1 + 2c)$, sodass $c = 1$ gelten muss. Daher gilt

$$y(x) = \frac{1}{2}\ln(-\cos(2x) + 2).$$

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$, da $|\cos(2x)| < 2$.

c) (5 Punkte) Mit charakteristischem Polynom $\lambda^2 + 1 = 0$ ergibt sich als (reelle) Loesung der zug. homogenen Gleichung

$$y_h(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für eine partikuläre Lösung nutzen wir den Ansatz vom Typ der rechten Seite. (Resonanzfall!) Der Ansatz $y_p(x) = ax\cos x + bx\sin x$ ergibt $a = 0$, $b = 1/2$. Also ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{1}{2}x\sin x + c_1\cos(x) + c_2\sin(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Aufgabe

8 Punkte

Ermitteln Sie mit der Methode der Laplace-Transformation die Lösung für das Anfangswertsproblem

$$\dot{x}(t) - x(t) = \delta_1(t) + u_2(t), \qquad x(0) = 1.$$

Dabei steht $\delta_1(t)$ für die bei $t = 1$ konzentrierte Dirac-Funktion und $u_2(t)$ für die Sprungfunktion bei $t = 2$.

Korrekturgrundlage (keine Musterlösung):
Die Laplace-Transformation der DGL ergibt mit $X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$:

$$sX(s) - 1 - X(s) = e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-2s} \quad \Longleftrightarrow \quad X(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s-1)} + \frac{e^{-s}+1}{s-1}$$

Partialbruchzerlegung (Zuhaltemethode):

$$\frac{1}{s(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s-1}$$

Somit ergibt sich

$$X(s) = \frac{1}{s-1} + e^{-2s}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right] + e^{-s}\frac{1}{s-1}.$$

Für die Rücktransformation sieht man direkt

$$\mathcal{L}[e^t](s) = \frac{1}{s-1}, \qquad \mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}.$$

Außerdem durch den Verschiebungssatz:

$$e^{-s}\frac{1}{s-1} = e^{-s}\mathcal{L}[e^t](s) = \mathcal{L}[u_1(t)e^{t-1}](s)$$

und

$$e^{-2s}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right] = e^{-2s}\Big[\mathcal{L}[e^t](s) - \mathcal{L}[1](s)\Big] = \mathcal{L}[u_2(t)(e^{t-2}-1)](s)$$

Insgesamt ergibt sich somit die Lösung

$$x(t) = e^t + u_2(t)\big(e^{t-2} - 1\big) + u_1(t)e^{t-1}.$$

3. Aufgabe 9 Punkte

Gegeben ist für $0 < x < 1$ und $t > 0$ die partielle DGL mit einer Randbedingung für eine Funktion $u(x,t)$,

$$u_t = u_{xx}, \qquad u(0,t) = 0.$$

a) Finden Sie alle nicht-trivialen Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$. Betrachten Sie dazu die verschiedenen Fälle für die Separationskonstante.

b) Was muss für die Separationskonstante gelten, wenn zusätzlich $u(1,t) = 5$ gilt? Geben Sie für diesen Fall auch die Lösung $u(x,t)$ an.

Korrekturgrundlage (keine Musterlösung):
a) (6 Punkte) Die Separation $u(x,t) = X(x)T(t)$ ergibt die DGLn

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Für T ergibt sich $T(t) = c\, e^{\lambda t}$.
Lösen der DGL $X'' - \lambda X = 0$ mit Fallunterscheidung. Dabei gilt wegen der Randbedingung: $X(0) = 0$.

1.Fall: $\lambda = 0$. $X(x) = c_1 + c_2 x$. Mit der Randbedingung gilt $X(x) = c_2 x$, also auch $u(x,t) = cx$.

2.Fall: $\lambda > 0$. Mit $\lambda = \mu^2$, also $X'' - \mu^2 X = 0$ ergibt sich als Lösung

$$X(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}.$$

Mit der Randbedingung gilt $c_1 + c_2 = 0$, also $X(x) = c_1(e^{\mu x} - e^{-\mu x})$. Insgesamt ergibt sich damit $u(x,t) = c\, e^{\mu^2 t}(e^{\mu x} - e^{-\mu x})$.

3.Fall: $\lambda < 0$. Mit $\lambda = -\omega^2$, also $X'' + \omega^2 X = 0$ ergibt sich als (reelle) Lösung

$$X(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x).$$

Randbedingung $X(0) = 0$ ergibt $c_1 = 0$, also $X(x) = c_2 \sin(\omega x)$ und damit $u(x,t) = c\, e^{-\omega^2 t} \sin(\omega x)$.

b) (3 Punkte) Die Randbedingung $u(1,t) = X(1)T(t) = 5$ ergibt, dass $T(t)$ konstant sein muss, also $\lambda = 0$.
Wir sind also im ersten Fall aus Teil a) und somit (wegen der Randbedingung)

$$u(x,t) = cx = 5x.$$

Name: .... Matr.–Nr.: ....

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

Für $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ betrachten wir das lineare DGL-System

$$\dot{\vec{x}} = \frac{1}{t^2-2}\begin{bmatrix} t & -2 \\ -1 & t \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix}, \qquad \vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{x}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\vec{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ t \end{bmatrix}$ die zugehörige homogene DGL lösen und ein Fundamentalsystem bilden.

b) Lösen Sie das AWP der *hom. DGL* mit der Anfangsbedingung $\vec{x}(1) = \vec{x}_0$.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der (inhomogenen) DGL.

d) Lösen Sie das AWP der *inhom. DGL* mit der Anfangsbedingung $\vec{x}(1) = \vec{x}_0$.

Korrekturgrundlage (keine Musterlösung):

a) (3 Punkte) Einsetzen von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ in die homogene DGL zeigt, dass dies beides Lösungen sind. Weiter zeigt der Wronskitest

$$\det\begin{bmatrix} t & 2 \\ 1 & t \end{bmatrix} = t^2 - 2 \neq 0,$$

dass $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ ein Fundamentalsystem bilden.

b) (2 Punkte) Mit dem Ansatz $\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t)$ folgt

$$\vec{x}(1) = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1, c_2 = 1.$$

Die Lösung ist demnach

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+t \\ 1+t \end{bmatrix}.$$

c) (4 Punkte) Variation der Konstanten ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} t & 2 \\ 1 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix}.$$

Damit ergibt sich $c_1' = t\ c_2' = 0$, also zB $c_1(t) = t^2/2\ c_2(t) = 0$. Insgesamt ergibt sich dann die partikuläre Lösung

$$\vec{x}_p(t) = c_1(t)\vec{x}_1(t) + c_2(t)\vec{x}_2(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \end{bmatrix}.$$

d) (1 Punkt) Mit dem Ansatz $\vec{x}(t) = \vec{x}_p(t) + c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t)$ folgt

$$\vec{x}(1) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 1.$$

Die Lösung ist demnach

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}t^3\\t^2\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}t\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t + 2\\ \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei das Anfangswertsproblem

$$\dddot{x} + \cos(t)\ddot{x} + f(t)x = \pi^t - 3, \qquad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = a,$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und einer stetigen Funktion $f\colon]-2, \infty[\to \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass das AWP für alle $a \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung besitzt, und geben Sie deren Definitionsbereich an.

b) Wandeln Sie das AWP in ein System erster Ordnung um.

c) Sei $x(t)$ die Lösung des AWP für $a = 1$. Löst dann $y(t) := 2x(t)$ das AWP für $a = 2$?

Korrekturgrundlage (keine Musterlösung):

a) (4 Punkte) Es handelt sich um eine lineare DGL. Daher genügt es, dass die Koeffizienten und die rechte Seite jeweils stetig sind. Dies ist offensichtlich der Fall auf $]-2, \infty[$, sodass auch hier zu jedem Anfangswert (es gilt $0 \in]-2, \infty[$) eine eindeutige Lösung existiert.
Die Lösung ist auf $]-2, \infty[$ definiert, da die Koeffizienten dort stetig sind.

b) (4 Punkte) Mit $y_1 = x$, $y_2 = x'$, $y_3 = x''$ ergibt sich das System

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -f(t) & 0 & -\cos(t) \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi^t - 3 \end{bmatrix}, \qquad y(0) = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}.$$

c) (2 Punkte) Nein, da hier inhomogene Lösungen addiert werden.

($y(t) = 2x(t)$ löst das AWP für $a = 2$ und Inhomogenität $2\pi^t - 6$.)

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Bestimmen Sie für das System

$$\dot{x} = xy - 4x - y + 4, \qquad \dot{y} = (x-2)(y-3)$$

alle Gleichgewichtspunkte. Untersuchen Sie zudem deren Stabilitätsverhalten.

b) Bestimmen Sie das Stabilitätsverhalten des GGP $\vec{z}_*$ für das System

$$\dot{\vec{z}} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha - 3 \\ 0 & \alpha - 2 \end{bmatrix} \vec{z}, \qquad \vec{z}_* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$.

Korrekturgrundlage (keine Musterlösung):

a) (5 Punkte) Mit $\dot{x} = (x-1)(y-4)$ ergeben sich die beiden Gleichgewichtspunkte

$$(1,3), \qquad (2,4).$$

Die Jacobi Matrix zum System hat die Form:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} y-4 & x-1 \\ y-3 & x-2 \end{bmatrix}.$$

Also ergibt sich für die beiden GGP

$$J(1,3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad J(2,4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Somit ist der GGP $(1,3)$ asymptotisch stabil und der GGP $(2,4)$ instabil (Eigenwerte 1 und -1).

b) (5 Punkte) Die Eigenwerte der Matrix sind gegeben durch $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = \alpha - 2$. Somit ergibt sich die folgende Fallunterscheidung:

$\alpha < 2$: stabil, da ein Eigenwert negativ ist und die 0 nur einfach auftritt, aber nicht asymptotisch stabil,
$\alpha = 2$: instabil, da 0 doppelter Eigenwert mit geom. Vielf. $\neq$ alg. Vielf.,
$\alpha > 2$: instabil, da ein Eigenwert positiv ist.