Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 15/16

G. Penn-Karras 19. Februar 2016

Februar – Klausur
Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

11 Punkte

Lösen Sie im $\mathbb{R}^3$ das Anfangswertsproblem

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}(t), \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode der Laplace-Transformation die Lösung für das Anfangswertsproblem

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 3x(t) = 18(t-1)u_1(t), \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -1.$$

Dabei steht $u_1(t)$ für die Sprungfunktion, die bei $t = 1$ von Null auf Eins springt.

Hinweis: Die folgende Partialbruchzerlegung darf ohne Nachweis benutzt werden:

$$\frac{18}{s^2(s+1)(s+3)} = -\frac{8}{s} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s+1} - \frac{1}{s+3}.$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist das Randwertproblem

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0, \qquad u(0,t) = u(2\pi, t) = 0.$$

a) Finden Sie alle Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$. Hierbei können Sie ohne Beweis verwenden, dass die Funktionen $X(x)$ periodisch und nicht-konstant sind.

b) Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung, die die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 5\sin 2x + 4\sin 3x$$

erfüllt.

Hinweis: Konstruieren Sie Ihre Separationskonstante λ so, dass die DGL für X von der Form $X'' - \lambda X = 0$ ist.

Bitte 2. Blatt beachten!

Verständnisteil

4. Aufgabe
10 Punkte

Gegeben ist das Anfangswertsproblem

$$(2\sqrt{x})y' = 1 + y^2, \quad x > 0, \qquad y\left(\tfrac{\pi^2}{16}\right) = 1.$$

a) Ermitteln Sie eine Lösung zusammen mit ihrem maximalen Definitionsbereich.

b) Zeigen Sie, dass dieses Anfangswertsproblem genau eine Lösung hat.

5. Aufgabe
10 Punkte

Gegeben ist das reelle dynamische System

$$\dot{x} = (x-1)(y-2), \qquad \dot{y} = (x-5)(y-1).$$

Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen zusammen mit ihrem Stabilitätscharakter (*asymptotisch stabil* oder *instabil*).

6. Aufgabe
10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Für die Differentialgleichung $y'' + 4y = 0,\ x \in \mathbb{R}$, bilden die Lösungen $2\cos 2x$ und $\cos^2 x - \sin^2 x$ ein Fundamentalsystem.

b) Sind $\vec{y}_1$ und $\vec{y}_2$ Lösungen der Differentialgleichung $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ mit einer reellen (3×3)-Matrix A, so ist auch $\vec{y}_1 + \vec{y}_2$ eine Lösung.

c) Für das dynamische System $\dot{x} = y,\ \dot{y} = x$ ist die Funktion $E(x,y) = x^2 - y^2$ eine Erhaltungsgröße.

d) Es gilt $\mathrm{e}^t * \mathrm{e}^{-t} = \mathbf{1}$.
($\mathbf{1}$ ist die konstante Funktion mit dem Wert 1. Die Faltung $*$ ist im Sinne der Laplace-Transformation zu verstehen.)

e) Die partielle Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$$

wird nur durch konstante Funktionen $u(x,y)$ (d.h. $u(x,y) = c$ mit irgendeiner Zahl c) gelöst, und es gibt keine weiteren Lösungen.