Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 15/16
G. Penn-Karras 07. April 2016

April – Klausur
Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

11 Punkte

Lösen Sie im $\mathbb{R}^3$ das Anfangswertsproblem

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(t), \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode der Laplace-Transformation die Lösung für das Anfangswertsproblem

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = \delta_2(t), \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -1.$$

Dabei steht $\delta_2(t)$ für die bei $t = 2$ konzentrierte Dirac-Funktion.

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist das Randwertproblem

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + 25u(x,t) = 0, \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

a) Finden Sie alle Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$. Hierbei können Sie ohne Beweis verwenden, dass die Funktionen $X(x)$ periodisch und nicht-konstant sind.

b) Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung, die die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 5\sin 3x + 2\sin 4x$$

erfüllt.

Hinweis: Konstruieren Sie Ihre Separationskonstante λ so, dass die DGL für X von der Form $X'' - \lambda X = 0$ ist.

Bitte 2. Blatt beachten!

Verständnisteil

4. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben ist das Anfangswertsproblem

$$y' - \frac{\mathrm{e}^y}{2\sqrt{1+x}} = 0, \quad x > -1, \qquad y(0) = 0.$$

a) Ermitteln Sie eine Lösung zusammen mit ihrem maximalen Definitionsbereich.

b) Zeigen Sie, dass dieses Anfangswertsproblem genau eine Lösung hat.

5. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben ist das reelle dynamische System

$$\dot{x} = (x-5)(y-2), \qquad \dot{y} = (x-1)(y-1).$$

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen.

b) Für welche dieser Gleichgewichtslösungen kann mit dem Stabilitätssatz für den nichtlinearen Fall der Stabilitätscharakter (*asymptotisch stabil* oder *instabil*) ermittelt werden? Geben Sie bei diesen Gleichgewichtslösungen den Stabilitätscharakter an und begründen Sie Ihre Antwort.

6. Aufgabe 10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Sind y_1 und y_2 zwei Lösungen der Differentialgleichung $y' - y = -1$, $x \in \mathbb{R}$, so ist auch die Summe $y_1 + y_2$ eine Lösung dieser Differentialgleichung.

b) Es gibt für das reelle DGL-System $\vec{y}\,' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\vec{y}$ zwei Lösungen $\vec{y}_1(t)$ und $\vec{y}_2(t)$, die linear unabhängig sind.

c) Der Gleichgewichtspunkt $(0,0)$ des reellen dynamischen Systems $\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x$ ist stabil.

d) Es gilt $t * t = t^2$.
(Die Faltung $*$ ist im Sinne der Laplace-Transformation zu verstehen.)

e) Eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ist durch $u(x,y) = x^2 - y^2$ gegeben.