Institut für Mathematik
Sommersemester 2016
Albrecht Gündel-vom Hofe
Martin Slowik

Technische Universität Berlin

1. Klausur zur „Differentialgleichungen für Ing.“

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist **ein handbeschriebenes DIN A4 Blatt** zugelassen!
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Geben Sie bitte alle beschriebenen Blätter, inklusive Ihrer Schmierzettel und Ihres Formelblattes ab.
- Die Klausur besteht aus 3 Rechenaufgaben (Aufgaben 1-3) und 3 Verständnisaufgaben (Aufgaben 4-6).
- Zum Bestehen der Klausur sind 30 Punkte notwendig, wobei jeweils im Rechen- und Verständnisteil mindestens 10 Punkte erreicht werden müssen.
- Für die Bearbeitung der Klausur haben Sie 90 Minuten Zeit.
- Geben Sie immer einen vollständigen und kommentierten Rechenweg an!
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Nicht angemeldete Klausuren können nicht korrigiert werden!
- Mit Bleistift/Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	**Summe**
Punkte							

Tabelle zur Laplacetransformation

$f(x)$	$\mathcal{L}\big[f(x)\big](t)$
1	$\dfrac{1}{t}$
$x^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{t^{n+1}}$
$x^\beta, \quad \beta > -1$	$\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{t^{\beta+1}}$
e^{ax}	$\dfrac{1}{t-a}$
$x^n \, \mathrm{e}^{ax}, \quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{(t-a)^{n+1}}$
$x^\beta \, \mathrm{e}^{ax}, \quad \beta > -1$	$\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{(t-a)^{\beta+1}}$
$\sin(ax)$	$\dfrac{a}{t^2+a^2}$
$\cos(ax)$	$\dfrac{t}{t^2+a^2}$
$\sin(ax)\, \mathrm{e}^{bx}$	$\dfrac{a}{(t-b)^2+a^2}$
$\cos(ax)\, \mathrm{e}^{bx}$	$\dfrac{t-b}{(t-b)^2+a^2}$
$\sinh(ax)$	$\dfrac{a}{t^2-a^2}$
$\cosh(ax)$	$\dfrac{t}{t^2-a^2}$
$\sinh(ax)\, \mathrm{e}^{bx}$	$\dfrac{a}{(t-b)^2-a^2}$
$\cosh(ax)\, \mathrm{e}^{bx}$	$\dfrac{t-b}{(t-b)^2-a^2}$
$\delta_a(x)$	e^{-at}

1. (Differentialgleichung 1.Ordnung) *[10 Pkt]*

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{y} + y\tan x\right), \qquad y(0) = 0, \qquad y\colon (-\pi/2, \pi/2) \to [0, \infty).$$

a) Leiten Sie für die Funktion $u(x) = \sqrt[3]{y(x)^2}$ ein lineares Anfangswertproblem 1. Ordnung her und bestimmen Sie dessen Lösung.

b) Geben Sie die zugehörige Lösung y des ursprünglichen Anfangswertproblems an.

2. (Differentialgleichungssysteme) *[10 Pkt]*

Gegeben sei das folgende lineare Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,' = A \cdot \vec{y} + \vec{b}(x) \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}(x) = \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen, linearen Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie die Wronski-Matrix $W(x)$ und berechnen Sie dessen Inverse.

c) Berechnen Sie mittels Variation der Konstanten eine Partikularlösung und geben Sie den Lösungsraum $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ an.

3. (Differentialgleichung höherer Ordnung) *[10 Pkt]*

Betrachten Sie die inhomogene Differentialgleichung

$$y''' + 2y'' + 2y' = x.$$

a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem.

b) Berechnen Sie eine Partikularlösung mittels einer geeigneten Ansatzfunktion und geben Sie den Lösungsraum $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ an.

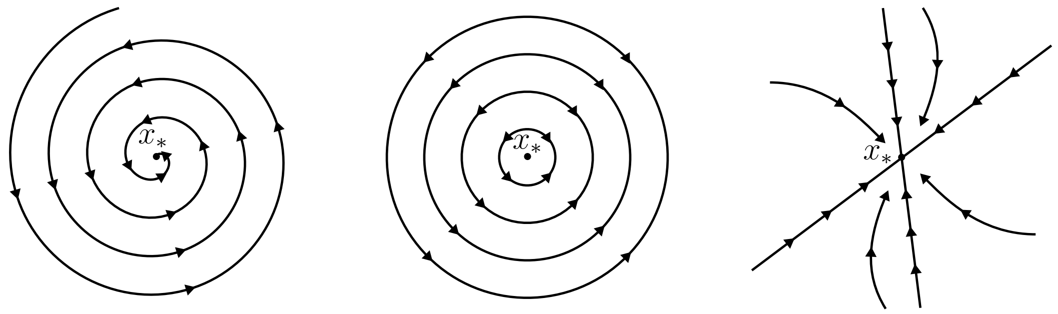
4. (Stabilität von Gleichgewichtspunkten) *[10 Pkt]*

Gegeben sei das folgende lineare Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,' \;=\; A \cdot \vec{y} + \vec{b}(x) \qquad \text{mit} \qquad A \;=\; \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}(x) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Untersuchen Sie die obige Differentialgleichung auf Gleichgewichtspunkte und charakterisieren Sie diese hinsichtlich ihres Stabilitätscharakters.

b) Entscheiden Sie (kurze Begründung), welches der drei abgebildeten Phasenportraits die Stabilitätscharakteristik der gegebenen Differentialgleichung beschreibt.



(A) (B) (C)

5. (Laplacetransformation von Differentialgleichungen) *[10 Pkt]*

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' + y \;=\; u_{2\pi}(x)\, \cos(x - 2\pi), \qquad\qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

a) Berechnen Sie die Laplacetransformierte der Funktion $f(x) = x \sin(ax)$, $a \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie mittels Laplacetransformation die Lösung $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ des obigen Anfangswertproblems.

Hinweis: Sie können an geeigneter Stelle Aufgabenteil a) verwenden.

6. (Eigenschaften von Differentialgleichungen) *[10 Pkt]*

a) Es seien $y_1, y_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei verschiedene Lösungen einer inhomogenen, linearen Differentialgleichung $y' = a(x)\, y + b(x)$. Welche Differentialgleichung löst dann die Funktion $f(x) = y_1(x) - y_2(x)$? (kurze Begründung)

Finden Sie Funktionen $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass die Funktion $y(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = a(x)\, y^2 + b(x)$ ist. (kurze Begründung)

b) Bestimmen Sie mittels des Faltungssatzes die Lösung der Integralgleichung

$$f'(x) \;=\; \sin x + \int_0^x f(x-y)\, \cos y \, \mathrm{d}y, \qquad f(0) \;=\; 0.$$