Institut für Mathematik
Sommersemester 2016
Albrecht Gündel-vom Hofe
Martin Slowik

2. Klausur zur „Differentialgleichungen für Ing."

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist **ein handbeschriebenes DIN A4 Blatt** zugelassen!
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Geben Sie bitte alle beschriebenen Blätter, inklusive Ihrer Schmierzettel und Ihres Formelblattes ab.
- Die Klausur besteht aus 3 Rechenaufgaben (Aufgaben 1-3) und 3 Verständnisaufgaben (Aufgaben 4-6).
- Zum Bestehen der Klausur sind 30 Punkte notwendig, wobei jeweils im Rechen- und Verständnisteil mindestens 10 Punkte erreicht werden müssen.
- Für die Bearbeitung der Klausur haben Sie 90 Minuten Zeit.
- Geben Sie immer einen vollständigen und kommentierten Rechenweg an!
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Nicht angemeldete Klausuren können nicht korrigiert werden!
- Mit Bleistift/Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	**Summe**
Punkte							

Tabelle zur Laplacetransformation

$f(x)$	$\mathcal{L}\big[f(x)\big](t)$
1	$\dfrac{1}{t}$
$x^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{t^{n+1}}$
$x^\beta, \quad \beta > -1$	$\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{t^{\beta+1}}$
e^{ax}	$\dfrac{1}{t-a}$
$x^n\,\mathrm{e}^{ax}, \quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{(t-a)^{n+1}}$
$x^\beta\,\mathrm{e}^{ax}, \quad \beta > -1$	$\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{(t-a)^{\beta+1}}$
$\sin(ax)$	$\dfrac{a}{t^2+a^2}$
$\cos(ax)$	$\dfrac{t}{t^2+a^2}$
$\sin(ax)\,\mathrm{e}^{bx}$	$\dfrac{a}{(t-b)^2+a^2}$
$\cos(ax)\,\mathrm{e}^{bx}$	$\dfrac{t-b}{(t-b)^2+a^2}$
$\sinh(ax)$	$\dfrac{a}{t^2-a^2}$
$\cosh(ax)$	$\dfrac{t}{t^2-a^2}$
$\sinh(ax)\,\mathrm{e}^{bx}$	$\dfrac{a}{(t-b)^2-a^2}$
$\cosh(ax)\,\mathrm{e}^{bx}$	$\dfrac{t-b}{(t-b)^2-a^2}$
$\delta_a(x)$	e^{-at}

1. (Differentialgleichungssysteme) *[10 Pkt]*

Gegeben sei das folgende lineare Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,' \;=\; A \cdot \vec{y} \qquad \text{mit} \qquad A \;=\; \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{y}(0) \;=\; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem und geben Sie den Lösungsraum $\mathbb{L}_{\mathrm{H}}$ an.

b) Stellen Sie die Wronski-Matrix $W(x)$ auf, und überprüfen Sie anhand dieser, ob die von Ihnen im Aufgabenteil a) bestimmten Lösungen linear unabhängig sind.

c) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

2. (Differentialgleichung höherer Ordnung) *[10 Pkt]*

Betrachten Sie die inhomogene Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' \;=\; 6x + 2.$$

a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem.

b) Berechnen Sie eine Partikularlösung mittels einer geeigneten Ansatzfunktion und geben Sie den Lösungsraum $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ an.

3. (Laplacetransformation) *[10 Pkt]*

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' + 2y' + y \;=\; \delta_{-1}(x), \qquad\qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1,$$

wobei δ_a die Dirac-Distribution ist.

a) Bestimmen Sie mittels Laplacetransformation die Lösung $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ des obigen Anfangswertproblems.

b) Berechnen Sie unter Anwendung geeigneter Sätze zur Laplacetransformation die Rücktransformierte von

$$F(t) \;=\; \mathrm{e}^{-2\pi t}\,\frac{1}{t^2+1}.$$

c) Bestimmen Sie mittels des Faltungssatzes und unter Anwendung von Aufgabenteil b) die Lösung der Integrodifferentialgleichung

$$f'(x) + \int_0^x 1 \cdot f(x-y)\,\mathrm{d}y \;=\; u_{2\pi}(x), \qquad f(0) \;=\; 0,$$

wobei u_a die Heaviside-Funktion sei.

4. (Differentialgleichung 1.Ordnung) *[10 Pkt]*

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' \;=\; x\tan\left(\frac{y}{x^2}\right) + \frac{2\,y}{x}, \qquad y(1) = \frac{\pi}{2}, \qquad y\colon (0,1] \to \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Substitution $u(x) = y(x)/x^2$ auf die Differentialgleichung

$$u' \;=\; \frac{\tan(u)}{x}$$

führt, und bestimmen die den zugehörigen Anfangswert.

b) Bestimmen Sie die Lösung u dieser Differentialgleichung, und geben Sie die Lösung y des ursprünglichen Anfangswertproblems an.

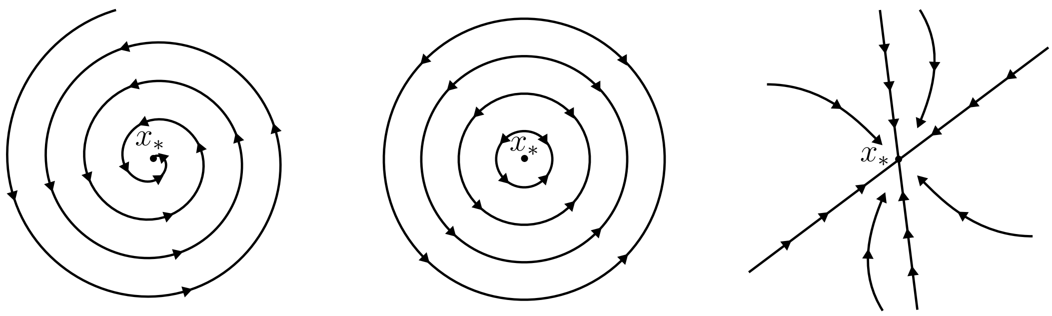
5. (Stabilität von Gleichgewichtspunkten) *[10 Pkt]*

Gegeben sei das folgende autonome Differentialgleichungssystem.

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 - (3 + y_1)\,y_2 \\ y_2' &= (1 - y_2)\,y_1 \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte der obige Differentialgleichung und charakterisieren Sie diese hinsichtlich ihres Stabilitätscharakters.

b) Entscheiden Sie für jeden Gleichgewichtspunkt (kurze Begründung), ob eines und, wenn ja, welches der drei abgebildeten Phasenportraits die Stabilitätscharakteristik beschreibt.



(A) (B) (C)

6. (Eigenschaften von Differentialgleichungen) *[10 Pkt]*

a) Betrachten Sie die separable Differentialgleichung $y' = g(x)h(y)$, wobei die Funktion g nicht identisch Null ist. Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion h an (kurze Begründung), so dass die konstante Funktion $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = 1$ für alle $x \in I$ eine Lösung der DGL $y' = g(x)h(y)$ ist.

b) Finden Sie eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten so (kurze Begründung), dass

i) die Differentialgleichung von möglichst kleiner Ordnung ist und

ii) von $y(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ und der konstanten Funktion $y(x) = 1$ gelöst wird.