Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Dr. Gabriele Penn-Karras

19. Februar 2018

Modulklausur: Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vornome: ....

Matrikelnummer: .... Studiengang: ....

Als Hilfsmittel sind ein **beidseitig beschriebenes A4-Blatt** und die **beigefügte Laplace-tabelle** zugelassen. **Weitere Hilfsmittel sind nicht erlaubt**, insbesondere keine Formelsammlungen, Handys und Taschenrechner.

Die Lösungen sind auf A4-Blättern abzugeben. Bitte beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Mit Blei- oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Sofern es nicht anders gefordert ist, sind sämtliche Lösungen zu begründen und **Rechenwege stets anzugeben**.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte							

Übersicht über einige Funktionen und ihre Laplacetransformierten

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^n}$
$\sin(t)$	$\frac{1}{s^2+1}$
$\cos(t)$	$\frac{s}{s^2+1}$
$\sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$
$e^{\beta t}\sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$
$e^{\beta t}\cos(\alpha t)$	$\frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$
$u_\tau(t)$	$\frac{e^{-\tau s}}{s}$
$\delta_\tau(t)$	$e^{-\tau s}$

Aufgabe 1 (12 Punkte)
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x'' + 9x = b(t).$$

(i) Geben Sie die zugehörige homogene Gleichung an und bestimmen Sie deren allgemeine reelle Lösung.

(ii) Finden Sie die allgemeine reelle Lösung der obigen Gleichung für $b(t) = 27t^2 + e^{2t}$ und nutzen Sie zur Bestimmung einer partikulären Lösung den Ansatz der rechten Seite.

(iii) Geben Sie einen zielführenden Ansatz der rechten Seite für den Fall $b(t) = \sin(3t)$ an.

Hinweis zu (iii): Die zugehörige Lösung muss **nicht** bestimmt werden.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x' = (6t^2 + 1)e^{-2x}.$$

(ii) Entscheiden Sie, ob die Differentialgleichung

$$x' = \sin(t - x) - tx^2$$

eine Lösung x mit $x(0) > 0$ besitzt.

Aufgabe 3 (11 Punkte)
Betrachten Sie das System

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

(i) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem für diese Gleichung.

(ii) Finden Sie diejenige Lösung, die die Anfangsbedingung

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

erfüllt.

Hinweis: Dass die von Ihnen angegebenen Funktionen in (i) wirklich ein Fundamentalsystem bilden, muss **nicht** nachgewiesen werden.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (9 Punkte)
Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} x' &= (9 - x^2)e^{2y} \\ y' &= -8y. \end{aligned}$$

(i) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Systems.

(ii) Untersuchen Sie für die in (i) ermittelten Gleichgewichtspunkte das Stabilitätsverhalten gemäß eines Satzes aus der Vorlesung.

Aufgabe 5 (8 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' - 2x = \delta_5(t) + e^t \\ x(0) = 7 \end{cases}$$

mithilfe der Laplacetransformation. Dabei bezeichnet δ_5 die in $t = 5$ zentrierte Diracsche δ-Distribution.

Aufgabe 6 (11 Punkte)
Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$y_t(x,t) - y_{xx}(x,t) + 3y(x,t) = 0.$$

(i) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung, welche die Form

$$y(x,t) = X(x)T(t)$$

haben und bezüglich x periodisch und nichtkonstant sind.

(ii) Finden Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse aus (i) eine Lösung der Differentialgleichung, die zusätzlich die Randbedingungen

$$y(0,t) = y(2\pi,t) = 0$$

und die Anfangsbedingung

$$y(x,0) = \sin(2x) - 6\sin(5x)$$

erfüllt.