

Differentialgleichungen für Ingenieure (WS 2017/2018)  
Musterlösung zur Februartklausur

**Wichtige Hinweise:**

- Die hier angegebenen Musterlösungen eignen sich **nicht** zum Lernen des Vorlesungsstoffes und können daher beim Lernen nur zur *Wissensüberprüfung* sinnvoll genutzt werden.
- Es ist nur sinnvoll, die Musterlösungen zu lesen, wenn man eine Aufgabe vorher selbst **vollständig gelöst** hat und sich sicher ist, dass die **eigene Lösung stimmt**. Wer eine Aufgabe der eigentlichen Klausur nicht lösen kann oder sich bei der eigenen Lösung unsicher ist, hat massive Probleme mit dem entsprechenden Vorlesungsstoff und sollte besser diesen wiederholen anstatt die Musterlösung zu lesen.
- Lösungswege, die von den hier angegebenen abweichen, können ebenso richtig sein. Daher ist es nicht wichtig, ob die eigene Lösung mit der Musterlösung übereinstimmt oder nicht, solange das Rechenergebnis stimmt.
- **Erfahrungsgemäß werden die obigen Ratschläge häufig ignoriert. Dies dürfte einer der Gründe für schlechte Klausurergebnisse sein.**

**Aufgabe 1**

(i) Die zugehörige homogene Gleichung lautet

$$x'' + 9x = 0.$$

Um ihre allgemeine Lösung zu bestimmen, betrachten wir das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 9,$$

dessen Nullstellen durch

$$\lambda_1 = 3i \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -3i$$

gegeben sind. Also ergibt sich

$$x(t) = C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

als allgemeine reelle Lösung.

(ii) Zur Bestimmung einer partikulären Lösung verwenden wir den Ansatz

$$x_p(t) = At^2 + Bt + C + De^{2t}$$

mit  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ . Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$2A + 4De^{2t} + 9At^2 + 9Bt + 9C + 9De^{2t} = 27t^2 + e^{2t}.$$

Durch einen Koeffizientenvergleich folgt

$$A = 3, \quad B = 0, \quad C = -\frac{2}{3}, \quad D = \frac{1}{13}.$$

Die zugehörige partikuläre Lösung lautet also

$$x_p(t) = 3t^2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{13}e^{2t}.$$

Demnach ist

$$x(t) = C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t) + 3t^2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{13}e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

(iii) Ein geeigneter Ansatz ist

$$x_p(t) = At \sin(3t) + Bt \cos(3t), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

**Erläuterungen:**

- In (iii) wird der Vorfaktor  $t$  gebraucht, da

$$x(t) = A \sin(3t) + B \cos(3t)$$

für  $A, B \in \mathbb{R}$  stets eine homogene Lösung ist, wie in (i) gezeigt worden ist. Würde man also diesen Ansatz in die inhomogene Gleichung einsetzen, so erhielte man

$$0 = \sin(3t),$$

was für keine  $A, B \in \mathbb{R}$  stimmt. Ein solcher Ansatz ist daher nicht zielführend.

## Aufgabe 2

(i) Da die Gleichung

$$x' = (6t^2 + 1)e^{-2x}$$

separabel<sup>1</sup> ist, können wir ihre allgemeine Lösung durch Trennung der Veränderlichen bestimmen. Zunächst stellen wir sie um zu

$$e^{2x(t)}x'(t) = 6t^2 + 1$$

und integrieren auf beiden Seiten, was uns

$$\frac{1}{2}e^{2x(t)} = 2t^3 + t + C$$

mit einer Konstanten  $C \in \mathbb{R}$  liefert. Also folgt

$$e^{2x(t)} = 4t^3 + 2t + 2C$$

und schließlich

$$x(t) = \frac{1}{2} \ln(4t^3 + 2t + 2C).$$

### Erläuterungen:

- Man bekommt zu viele Lösungen, wenn man zusätzliche Betragsstriche einführt und  $\ln(4t^3 + 2t + 2C)$  durch  $\ln(|4t^3 + 2t + 2C|)$  ersetzt. Ist nämlich  $4t^3 + 2t + 2C$  negativ, so kann

$$e^{2x(t)} = 4t^3 + 2t + 2C$$

durch keine Funktion  $x$  erfüllt werden. Mit Betragsstrichen wäre dies sehr wohl möglich. Solche Funktionen lösen allerdings nicht die ursprüngliche Gleichung.

- Da die Rechenregel  $\ln(a + b) = \ln(a) + \ln(b)$  im allgemeinen *nicht* gilt, kann  $\ln(4t^3 + 2t + 2C)$  nicht durch  $\ln(4t^3 + 2t) + 2C$  oder ähnliche Ausdrücke ersetzt werden.

---

<sup>1</sup>Man beachte die richtige Schreibweise: „separabel“.

(ii) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = \sin(t - x) - tx^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

und zeigen mithilfe des Existenz- und Eindeigkeitssatzes, dass dieses genau eine Lösung  $x$  besitzt. Diese löst dann die Differentialgleichung und erfüllt wegen  $x(0) = 1$  auch die Bedingung  $x(0) > 0$ .

Um den Existenz- und Eindeigkeitssatz anwenden zu können, definieren wir die Funktion

$$f(t, x) = \sin(t - x) - tx^2$$

für  $t, x \in \mathbb{R}$ . Diese ist offensichtlich auf ganz  $\mathbb{R}^2$  definiert und dort stetig differenzierbar. Nach dem Existenz- und Eindeigkeitssatz besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = \sin(t - x) - tx^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

also genau eine maximal fortgesetzte Lösung.

### Erläuterungen:

- Der Existenz- und Eindeigkeitssatz trifft nur Aussagen über Anfangswertprobleme und ist daher nicht direkt auf Differentialgleichungen ohne eine zusätzliche Anfangsbedingung anwendbar.
- Der Satz verlangt die stetige Differenzierbarkeit von  $f$ . Dies ist äquivalent zur Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen von  $f$ . Die Differenzierbarkeit der partiellen Ableitungen wird hingegen *nicht* gebraucht.
- In der Definition von  $f$  stehen  $t$  und  $x$  für reelle Zahlen, wohingegen  $x$  in der Gleichung  $x' = f(t, x)$  als Abkürzung für  $x(t)$  benutzt wird. Die Differentialgleichung lautet ausgeschrieben  $x'(t) = f(t, x(t))$ . Daran ist zu erkennen, dass man nicht  $x'$  anstelle von  $f$  auf stetige Differenzierbarkeit untersuchen kann, da  $x'$  nur von einer Variablen (nämlich  $t$ ) abhängt und  $f$  von zwei (nämlich  $t$  und  $x$ ).
- Es gibt unendlich viele Lösungen der Differentialgleichung, die  $x(0) > 0$  erfüllen. Dies zeigt man, indem man die obige Anfangsbedingung  $x(0) = 1$  durch  $x(0) = x_0$  mit  $x_0 > 0$  ersetzt. Für jedes  $x_0$  erhält man dann mit dem Existenz- und Eindeigkeitssatz eine passende Lösung.

### Aufgabe 3

(i) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

ist eine untere Dreiecksmatrix, weshalb ihre Eigenwerte auf der Diagonalen abgelesen werden können. Sie lauten demnach

$$\lambda_{1/2} = -5 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 8.$$

Offenbar ist

$$\ker(A - \lambda_{1/2}I) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}.$$

Daran erkennen wir zum einen, dass

$$\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ein zu  $\lambda_{1/2}$  gehöriger Eigenvektor ist, und zum anderen, dass die geometrische Vielfachheit von  $\lambda_{1/2}$  nur eins und damit kleiner als die algebraische Vielfachheit ist. Wir benötigen daher einen zu  $\vec{v}_1$  linear unabhängigen Hauptvektor  $\vec{h}$ . Einen solchen bestimmen wir als Lösung des Gleichungssystems

$$(A - \lambda_{1/2}I)\vec{h} = \vec{v}_1,$$

also

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} \vec{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Eine Lösung ist offenbar durch

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gegeben.

Schließlich bemerken wir, dass

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_3 = 8$  ist. Damit ergeben sich insgesamt die drei Lösungen

$$\vec{x}_1(t) = e^{-5t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = e^{-5t} \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad \vec{x}_3(t) = e^{8t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

welche ein Fundamentalsystem bilden.

(ii) Die allgemeine Lösung der Gleichung lautet

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{-5t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{-5t} \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + C_3 e^{8t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Eine solche Funktion erfüllt die Anfangsbedingung

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

genau dann, wenn

$$C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ist. Dies liefert  $C_1 = 4$ ,  $C_2 = 0$  und  $C_3 = 2$ . Die gesuchte Lösung ist daher

$$\vec{x}(t) = 4e^{-5t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2e^{8t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

### Erläuterungen:

- Der Hauptvektor  $\vec{h}$  ist nicht eindeutig bestimmt. Für eine andere Wahl von  $\vec{h}$  muss allerdings gegebenenfalls die Lösung  $\vec{x}_2$  durch

$$\vec{x}_2(t) = e^{-5t} \left( \vec{h} + t(A - \lambda_{1,2}I)\vec{h} \right)$$

ersetzt werden.

- Ein Fundamentalsystem besteht immer aus einzelnen Funktionen, die zusammen den Lösungsraum aufspannen. Dadurch unterscheidet sich ein Fundamentalsystem von der allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung.

## Aufgabe 4

- (i) Definitionsgemäß sind die Gleichgewichtspunkte des Systems genau die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}(9 - x^2)e^{2y} &= 0 \\ -8y &= 0.\end{aligned}$$

Wegen  $e^{2y} \neq 0$  ist die erste Gleichung äquivalent zu  $9 - x^2$ , woraus sich  $x = -3$  oder  $x = 3$  ergibt. Die zweite Gleichung ist offensichtlich nur für  $y = 0$  erfüllt. Also sind

$$(3, 0) \quad \text{und} \quad (-3, 0)$$

die einzigen Gleichgewichtspunkte des Systems.

- (ii) Um das Stabilitätsverhalten der beiden Gleichgewichtspunkte zu ermitteln, betrachten wir die durch

$$\vec{F}(x, y) = \begin{bmatrix} (9 - x^2)e^{2y} \\ -8y \end{bmatrix}$$

definierte Funktion  $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und ihre durch

$$\vec{F}'(x, y) = \begin{bmatrix} -2xe^{2y} & 2(9 - x^2)e^{2y} \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

gegebene Ableitung. Für den Punkt  $(3, 0)$  ergibt sich die Matrix

$$\vec{F}'(3, 0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Da es sich hierbei um eine Diagonalmatrix handelt, können die Eigenwerte  $\lambda_1 = -6$  und  $\lambda_2 = -8$  auf der Diagonalen abgelesen werden. Beide sind negativ, sodass aus dem Stabilitätssatz für nichtlineare Systeme die asymptotische Stabilität des Gleichgewichtspunktes  $(3, 0)$  folgt.

Für  $(-3, 0)$  ergibt sich hingegen

$$\vec{F}'(-3, 0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Auch diese Matrix ist diagonal, sodass  $\lambda_1 = 6$  und  $\lambda_2 = -8$  die zugehörigen Eigenwerte sind. Da ein Eigenwert (nämlich  $\lambda_1 = 6$ ) positiv ist, handelt es sich bei  $(-3, 0)$  laut dem Stabilitätssatz für nichtlineare Systeme um einen instabilen Gleichgewichtspunkt.

## Aufgabe 5

Indem wir die Laplacetransformation auf beide Seiten der Gleichung

$$x' - 2x = \delta_5(t) + e^t$$

anwenden, erhalten wir

$$\mathcal{L}[x'](s) - 2\mathcal{L}[x](s) = \mathcal{L}[\delta_5](s) + \mathcal{L}[e^t](s),$$

wobei wir bereits die Linearität der Laplacetransformation ausgenutzt haben. Nun wenden wir auf der linken Seite den Ableitungssatz an und bestimmen des weiteren die Werte der Laplacetransformierten auf der rechten Seite. Dies führt auf

$$s\mathcal{L}[x](s) - x(0) - 2\mathcal{L}[x](s) = e^{-5s} + \frac{1}{s-1}.$$

Unter Ausnutzung der Anfangsbedingung  $x(0) = 7$  können wir dies umstellen zu

$$\mathcal{L}[x](s) = \frac{7}{s-2} + e^{-5s} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-1)(s-2)}.$$

Mittels einer Partialbruchzerlegung finden wir

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}$$

und daher

$$\mathcal{L}[x](s) = \frac{7}{s-2} + e^{-5s} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}.$$

Schließlich können wir rücktransformieren und erhalten mithilfe des Verschiebungssatzes

$$\begin{aligned} x(t) &= 7e^{2t} + u_5(t)e^{2(t-5)} + e^{2t} - e^t \\ &= 8e^{2t} + u_5(t)e^{2(t-5)} - e^t. \end{aligned}$$

### Erläuterungen:

- Der Satz von Lerch ist hier an der Stelle  $t = 5$  nicht anwendbar, da dieser nur die Eindeutigkeit der Rücktransformierten im Raum der stetigen Funktionen sichert.



## Aufgabe 6

(i) Setzen wir den Ansatz

$$y(x, t) = X(x)T(t)$$

in die gegebene Differentialgleichung

$$y_t(x, t) - y_{xx}(x, t) + 3y(x, t) = 0$$

ein, so erhalten wir

$$X(x)T'(t) - X''(x)T(t) + 3X(x)T(t) = 0.$$

Unter der Annahme, dass  $X(x)T(t) \neq 0$  ist, können wir durch  $X(x)T(t)$  teilen und erhalten

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} + 3 = 0,$$

was sich zu

$$\frac{T'(t)}{T(t)} + 3 = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

umstellen lässt. Da die linke Seite nur von  $t$  und die rechte nur von  $x$  abhängt, müssen beide Seiten konstant sein, d.h. es gibt ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$\frac{T'(t)}{T(t)} + 3 = \lambda = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Daraus ergeben sich die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T'(t) = (\lambda - 3)T(t)$$

und

$$X''(x) = \lambda X(x).$$

Da die Lösungen nur im Fall  $\lambda < 0$  periodisch und nichtkonstant werden, nehmen wir im folgenden  $\lambda < 0$  an. In diesem Fall ergeben sich die Lösungen

$$T(t) = Ce^{(\lambda-3)t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

und

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Folglich sind mit

$$y(x, t) = e^{(\lambda-3)t} \left( C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x) \right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

alle Lösungen mit den geforderten Eigenschaften gefunden.

(ii) Wählt man  $\lambda = -4$ ,  $C_1 = 0$  und  $C_2 = 1$ , so erhält man die Lösung

$$y_1(x, t) = e^{-7t} \sin(2x).$$

Für  $\lambda = -25$ ,  $C_1 = 0$  und  $C_2 = -6$  findet man

$$y_2(x, t) = e^{-28t} (-6 \sin(5x)).$$

Beide Funktionen erfüllen offensichtlich die Randbedingungen

$$y(0, t) = y(2\pi t) = 0.$$

Nach dem Superpositionsprinzip ist auch ihre Summe

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = e^{-7t} \sin(2x) + e^{-28t} (-6 \sin(5x))$$

eine Lösung und diese erfüllt sowohl die Randbedingungen als auch die Anfangsbedingung

$$y(x, 0) = \sin(2x) - 6 \sin(5x).$$

**Erläuterungen:**

- In (ii) können selbstverständlich auch erst alle Lösungen bestimmt werden, die die Randbedingungen erfüllen.