**Technische Universität Berlin**
**Fakultät II - Institut für Mathematik**
**Dr. Gabriele Penn-Karras** 9. April 2018

**Modulklausur: Differentialgleichungen für Ingenieure**

Name: .................................... Vorname: ......................................

Matrikelnummer: ......................... Studiengang: ..................................

---

Hiermit erkläre ich, dass

- mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Mir ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann. (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO)
- mir bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist. (§39 Abs. 2 AllgStuPO)
- mir bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Als Hilfsmittel sind ein **beidseitig beschriebenes A4-Blatt** und die **beigefügte Laplacetabelle** zugelassen. **Weitere Hilfsmittel sind nicht erlaubt**, insbesondere keine Formelsammlungen, Handys und Taschenrechner.

Die Lösungen sind auf A4-Blättern abzugeben. Bitte beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Mit Blei- oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Sofern es nicht anders gefordert ist, sind sämtliche Lösungen zu begründen und **Rechenwege stets anzugeben**.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

---

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

---

**Korrektur:**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | | | |
| | | | | | | | |

## Übersicht über einige Funktionen und ihre Laplacetransformierten

| $f(t)$ | $\mathcal{L}[f](s)$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $t^2$ | $\frac{2}{s^3}$ |
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{\alpha t}$ | $\frac{1}{s-\alpha}$ |
| $t^n e^{\alpha t}$ | $\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ |
| $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}$ | $\frac{1}{(s-\alpha)^n}$ |
| $\sin(t)$ | $\frac{1}{s^2+1}$ |
| $\cos(t)$ | $\frac{s}{s^2+1}$ |
| $\sin(\alpha t)$ | $\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$ |
| $\cos(\alpha t)$ | $\frac{s}{s^2+\alpha^2}$ |
| $e^{\beta t}\sin(\alpha t)$ | $\frac{\alpha}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$ |
| $e^{\beta t}\cos(\alpha t)$ | $\frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$ |
| $u_\tau(t)$ | $\frac{e^{-\tau s}}{s}$ |
| $\delta_\tau(t)$ | $e^{-\tau s}$ |

**Aufgabe 1 (11 Punkte)**
Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$x'' - 6x' + 9x = b(t).$$

(a) Geben Sie die zugehörige homogene Gleichung an und bestimmen Sie ihre allgemeine reelle Lösung.

(b) Ermitteln Sie die allgemeine reelle Lösung der Gleichung für $b(t) = 18t$ und nutzen Sie zur Bestimmung einer partikulären Lösung den Ansatz der rechten Seite.

(c) Geben Sie einen zielführenden Ansatz der rechten Seite für den Fall

$$b(t) = e^{7t} + 5e^{3t} + \sin(2t)$$

an.

*Hinweis zu (c):* Die entsprechende Lösung muss **nicht** bestimmt werden.

**Aufgabe 2 (12 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem für die Gleichung

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

*Hinweis:* Hier muss **nicht** gezeigt werden, dass die gefundenen Funktionen tatsächlich ein Fundamentalsystem bilden.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\vec{x}_1(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \text{ und } \vec{x}_2(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix}$$

ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}$$

bilden.

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$x' = \cos(t)e^{-3x}.$$

(b) Begründen Sie, dass die Differentialgleichung

$$x' = \sin(x^2 + t) - 3e^t$$

genau eine Lösung mit $x(0) = 3$ besitzt und diese für $t > 0$ monoton fallend ist.

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 4 (9 Punkte)** Betrachten Sie das System

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} \alpha - 1 & 4 & 3 \\ 0 & \alpha - 1 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \vec{x}$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Begründen Sie, dass der Nullpunkt $\vec{x}_0 = \vec{0}$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Gleichgewichtspunkt dieses Systems ist.

(b) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $\alpha$ das Stabilitätsverhalten des Nullpunktes gemäß eines Satzes aus der Vorlesung.

**Aufgabe 5 (8 Punkte)** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' - 5x = 10 + \delta_2(t) \\ x(0) = 4 \end{cases}$$

mithilfe der Laplacetransformation. Dabei bezeichnet $\delta_2$ die in $t = 2$ zentrierte Diracsche $\delta$-Distribution.

**Aufgabe 6 (10 Punkte)** Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$y_t(x,t) - y_x(x,t) + 8y(x,t) = 0.$$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen dieser Gleichung, die von der Form

$$y(x,t) = X(x)T(t)$$

sind.

(b) Finden Sie unter Ausnutzung der Ergebnisse aus (a) eine Lösung, die die Anfangsbedingung

$$y(x,0) = 4e^{x} - 2e^{3x}$$

erfüllt.