Technische Universität Berlin
Fakulät II - Institut für Mathematik SS 2018
A. Gündel-vom Hofe 01.08.2018

Juli - Klausur
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matrikelnummer: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt vollständig ist. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann. (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO)
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist. (§39 Abs. 2 AllgStuPO)
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Als Hilfsmittel sind ein beidseitig handbeschriebenes A4-Blatt und die beigefügte Laplacetabelle zugelassen. Weitere Hilfsmittel sind nicht erlaubt, insbesondere **keine Formelsammlungen**, **keine Handys** und **keine Taschenrechner**!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Blei- oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Sofern es nicht anders gefordert ist, sind **sämtliche Lösungen zu begründen** und **vollständige Rechenwege** stets anzugeben.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

Übersicht über einige Funktionen und ihre Laplacetransformierten

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)](s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^n}$
$\sin(t)$	$\frac{1}{s^2+1}$
$\cos(t)$	$\frac{s}{s^2+1}$
$\sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$
$e^{\beta t}\sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$
$e^{\beta t}\cos(\alpha t)$	$\frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$
$u_\tau(t)$	$\frac{e^{-\tau s}}{s}$
$\delta_\tau(t)$	$e^{-\tau s}$

1. Aufgabe **10 Punkte**

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \vec{x} \qquad \text{mit} \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems.

b) Begründen Sie, ob die in a) ermittelte Lösung eindeutig ist.

2. Aufgabe **8 Punkte**

Bestimmmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x' = \frac{x}{t} + te^t \qquad \text{mit} \qquad t > 0.$$

Hinweis: Nutzen Sie den Ansatz der Trennung der Veränderlichen und die Methode der Variation der Konstanten.

3. Aufgabe **11 Punkte**

Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung

$$x'' + 2x' - 3x = b(t) \qquad \text{mit} \qquad b(t) = -8e^t.$$

a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung. Zeigen Sie, dass alle Kriterien eines Fundamentalsystems erfüllt sind.

b) Finden Sie mittels einer geeigneten Ansatzfunktion eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung und geben Sie die allgemeine Lösung der Gleichung an.

c) Wie lautet eine geeignete Ansatzfunktion für die rechte Seite $b(t) = \cos(t) + t^2$?

Hinweis zu c): Die entsprechende Lösung muss **nicht** bestimmt werden.

4. Aufgabe **11 Punkte**

Lösen Sie unter Verwendung der Laplace-Transformation das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'' + x = b(t), \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0, \end{cases}$$

für die Faltung $b(t) = t * \delta_3(t)$. Dabei bezeichnet δ_3 die in $t = 3$ zentrierte Dirac-Distribution.

Bitte wenden!

5. Aufgabe **10 Punkte**

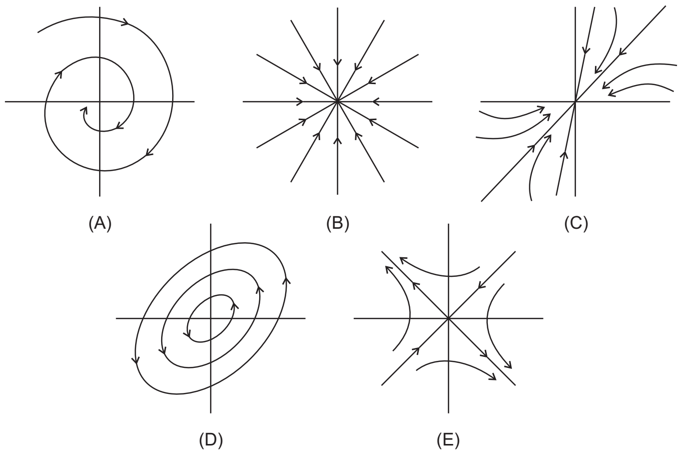
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}.$$

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Systems.

b) Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der in a) ermittelten Gleichgewichtspunkte.

c) Welches der Phasendiagramme (A) bis (E) beschreibt qualitativ das gegebene System? Begründen Sie Ihre Entscheidung.



6. Aufgabe **10 Punkte**

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)

a) Es ist $x'' = 3x' - x + t$ eine autonome Differentialgleichung 2. Ordnung.

b) Das Anfangswertproblem

$$x''' + 2x'' - x' + 3x = 0 \qquad \text{mit} \qquad x(0) = 1$$

besitzt eine eindeutige Lösung.

c) Nach der Eulerschen Formel gilt $e^{2it^2} = \cos(t^2) + 2i\sin(t^2)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$.

d) Es sei $\vec{x}_0$ ein Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems $\vec{x}\,' = \vec{F}(\vec{x})$. Dann ist $\vec{x}(t) = \vec{x}_0$ eine (zeitlich) konstante Lösung des Systems.

e) Es existieren zwei reelle, stetige Funktion $f(t)$ und $g(t)$ von exponentieller Ordnung, sodass $\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)](s) \neq \mathcal{L}[f(t)](s) \cdot \mathcal{L}[g(t)](s)$ gilt für geeignetes $s \in \mathbb{C}$.