Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS18/19

Penn-Karras 28.02.2019

Februar – Klausur
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift oder in Rot geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Schreiben Sie auf *jedes* von Ihnen benutzte Papier *sofort* Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Als Hilfsmittel darf, wie angekündigt, ein beidseitig handbeschriebenes Din-A4 Blatt mit Notizen und die Laplacetabelle benutzt werden. Weitere Hilfsmittel, wie z.B. Taschenrechner und Formelsammlung sind nicht zugelassen. Es dürfen keinerlei elektronische oder internetfähige Geräte wie Handys, Smartwatches etc. verwendet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.
Begründen Sie Ihre Schritte, wenn nichts anderes gesagt ist.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt (Deckblatt und **6** Aufgaben, insgesamt **4** Seiten) vollständig ist. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann.
- Ihnen ist bekannt, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist.
  (Paragraph 39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO)
- Ihnen ist bekannt, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

Übersicht über einige Funktionen und ihre Laplacetransformierten

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)](s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^n}$
$\sin(t)$	$\frac{1}{s^2+1}$
$\cos(t)$	$\frac{s}{s^2+1}$
$\sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$
$e^{\beta t}\sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$
$e^{\beta t}\cos(\alpha t)$	$\frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$
$u_\tau(t)$	$\frac{e^{-\tau s}}{s}$
$\delta_\tau(t)$	$e^{-\tau s}$

1. Aufgabe
9 Punkte

Wir betrachten die separable DGL

$$y' = (y+2)^2 2x.$$

a) Bestimmen Sie die konstanten Lösungen dieser DGL.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem zum Anfangswert $y(0) = -1$.
Geben Sie hier auch das maximale Definitionsintervall der Lösung an.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem zum Anfangswert $y(0) = -2$.

d) Sind die Lösungen in (b) und (c) eindeutig bestimmt? Begründen Sie dies.

2. Aufgabe
10 Punkte

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für das lineare, homogene System

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}.$$

b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für das homogene System:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für das lineare, inhomogene System

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 3e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe
9 Punkte

a) Die lineare, homogene Differentialgleichung 3.Ordnung

$$\dddot{y} + a\ddot{y} + b\dot{y} = 0$$

mit konstanten, reellen Koeffizienten a und b habe die Lösung $y_1(t) = e^{-t}\cos(3t)$. Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

<u>Hinweis :</u> Überlegen Sie sich zunächst, wie das charakteristische Polynom der Dgl. aussieht.

b) Bestimmen Sie einen Ansatz vom Typ der rechten Seite für eine partikuläre Lösung $y_p(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$\dddot{y} + 5\ddot{y} = t.$$

Ausrechnen der Koeffizienten von $y_p(t)$ ist nicht verlangt.

4. Aufgabe

14 Punkte

a) Wir betrachten für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $-4 < \alpha < 4$ das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & \alpha \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Für welche $\alpha \in]-4, 4[$ ist die Gleichgewichtslösung $\vec{x}(t) = 0$ stabil, instabil, bzw. asymptotisch stabil?

b) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen des nicht-linearen DGL-Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2 - 1)y \\ \dot{y} &= x(y^3 - 8) \end{aligned}$$

Welche Gleichgewichtslösungen sind asymptotisch stabil? Welche sind instabil?

5. Aufgabe

8 Punkte

Lösen Sie mittels Laplace-Transformation das Anfangswertproblem

$$\dot{y} + 4y = u_3(t)e^{-4t}, \quad y(0) = 1$$

erfüllt. Hierbei bezeichnet $u_3(t)$ die Heaviside-Funktion:

$$u_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 3 \\ 1 & \text{für } t > 3. \end{cases}$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$u_t = 3u_{xx}$$

der Gestalt $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$, welche die Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \quad u(2\pi, t) = 0$$

erfüllen.

Hinweis : Es genügt, (ohne Begründung) nur die Fälle zu betrachten, in denen Sinus- und Cosinus-Funktionen in der allgemeinen Lösung der Gleichung für F auftreten.

b) Lösen Sie das Rand-Anfangswertproblem

$$u_t = 3u_{xx}\,, \quad u(0,t) = 0, \quad u(2\pi, t) = 0, \quad u(x,0) = \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) + 2\sin(3x).$$