Lösungen zur Februar-Klausur

1. Aufgabe (1+5+1+2 Punkte)

a) $y_1 = -2$ ist einzige Nullstelle von $(y+2)^2$ und somit stationäre Lösung der Dgl.

b) Für $y \neq -2$ ergibt Trennung der Variablen :

$$x^2 + C = \int 2x dx = \int \frac{y'}{(y+2)^2} dx = \int \frac{1}{(y+2)^2} dy = \frac{-1}{y+2}.$$

Auflösen ergibt die allgemeine Lösung:

$$y(x) = -2 - \frac{1}{x^2 + C}, \quad C \text{ beliebige Konstante.}$$

Bestimmung von K durch Anfangsbedingung:

$$y(0) = -2 - \frac{1}{C} \stackrel{!}{=} -1$$

ergibt $C = -1$ und damit als Lösung des AWP

$$y(x) = \frac{1}{1 - x^2} - 2.$$

Der Nenner wird Null bei $x = \pm 1$, d.h. die (maximale) Lösung ist nur auf $]-1, 1[$ definiert:

$$y(x) = \frac{1}{1 - x^2} - 2, \quad x \in]-1, 1[.$$

Bei $x = \pm 1$ hat sie Pole, d.h.
$y(x) \to +\infty$ für $x \to \pm 1$. (Der Definitionsbereich der Lösung muss immer ein Intervall sein, welches den Anfangszeitpunkt, hier $x_0 = 0$, enthält.)

c) Die stationäre Lösung $y(x) = y_1 = -2$, $x \in \mathbb{R}$ ist die eindeutige (maximale) Lösung des AWP.

d) Mit der Funktion

$$F(x, y) = 2x(y+2)^2, \quad (x, y) \in U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

läßt sich die Dgl. schreiben als

$$y' = F(x, y).$$

Der Definitionsbereich $U = \mathbb{R}^2$ ist offen und die durch die Anfangsbedingung gegebenen Punkte $(0, -1)$ und $(0, -2)$ liegen in U. F ist auf $D = \mathbb{R}^2$ (in allen Variablen) stetig diffbar. Daher ist der EE-Satz anwendbar und liefert die Eindeutigkeit der (maximalen) Lösung.

2. Aufgabe (5+2+3 Punkte)

a) Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix: Charakteristisches Polynom:

$$\det\,(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(-\lambda)+2 = \lambda^2+3\lambda+2$$

$$= (\lambda+1)(\lambda+2) \stackrel{!}{=} 0$$

Eigenwerte $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$. Eigenvektoren der Matrix:

$$(A-\lambda_1 E)\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0} \qquad \iff -v_1+v_2=0.$$

Wir erhalten einen Eigenvektor

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu dem Eigenwert $\lambda_2=-2$:

$$(A-\lambda_2 E)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0} \qquad \iff -v_1+2v_2=0$$

ergibt einen Eigenvektor

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten als Fundamentalsystem:

$$\vec{x}_1(t) = e^{t\lambda_1}\vec{v}_1 = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2(t) = e^{t\lambda_2}\vec{v}_2 = e^{-2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Allgemeine Lösung des homogenen Systems:

$$\vec{x}_h(t) = \sum_{k=1}^{2} C_k\vec{x}_k(t) = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Zur Lösung des Anfangswertproblems sind die Konstanten C_1, C_2 aus (a) so zu bestimmen, dass die Anfangsbedingung erfüllt wird, d.h.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{x}(0) = \sum_{k=1}^{2} C_k\vec{x}_k(0) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt das Gleichungssystem $C_1+2C_2=3$ und $C_1+C_2=1$. Dieses System hat die eindeutige Lösung $C_1=-1, C_2=2$. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet somit

$$\vec{x}(t) = -e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{-2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Bestimmung einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems durch Variation der Konstanten:

$$\vec{x}_p(t) = \sum_{k=1}^{2} c_k(t)\vec{x}_k(t) \text{ mit}$$

$$\dot{c}_1(t)e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \dot{c}_2(t)e^{-2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{2} \dot{c}_k(t)\vec{x}_k(t) \overset{!}{=} 3e^t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

führt auf:

$$\dot{c}_1(t) = 0, \quad \dot{c}_2(t) = 3e^{3t}.$$

Integration ergibt (Integrationskonstanten können hier weggelassen werden, da nur **eine spezielle** Lösung gesucht ist.)

$$c_1(t) = 0, \quad c_2(t) = e^{3t}.$$

Wir erhalten als spezielle Lösung

$$\vec{x}_p(t) = \sum_{k=1}^{2} c_k(t)\vec{x}_k(t) = e^{3t}e^{-2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_p(t) + \sum_{k=1}^{2} C_k\vec{x}_k(t) = e^t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + C_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2e^{-2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \text{ Konstanten..}$$

3. Aufgabe (6+3 Punkte)

a) Da

$$y_1(t) = e^{-t}\cos(3t) = \operatorname{Re} e^{(-1+3i)t}$$

Lösung der Dgl. ist und die Koeffizienten reell sind, müssen $-1+3i$ und $-1-3i$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Dgl. sein. Damit ist auch

$$y_2(t) = \operatorname{Im} e^{(-1+3i)t} = e^{-t}\sin(3t)$$

eine Lösung der Dgl.
Darüberhinaus ist jede konstante Funktion eine Lösung der Dgl.,
also auch $y_3(t) = 1$.
Die allgemeine Lösung der Dgl. ist somit:

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + c_3y_3(t) = c_1e^{-t}\cos(3t) + c_2e^{-t}\sin(3t) + c_3,$$

wobei c_1, c_2, c_3 Konstanten . Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda = \lambda(\lambda^2 + a\lambda + b).$$

Es muss (neben Null) die Nullstellen $-1 \pm 3i$ haben. Wegen

$$(\lambda - (-1+3i))(\lambda - (-1-3i)) = (\lambda+1)^2 + 9 = \lambda^2 + 2\lambda + 10$$

folgt $a = 2$, $b = 10$.
Die Dgl. lautet somit:

$$y''' + 2y'' + 10y' = 0.$$

b) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 = (\lambda + 5)\lambda^2.$$

Damit ist $\lambda_1 = 0$ doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms Q. Für die Inhomogenität $t = te^{0t} = te^{\lambda_1 t}$ lautet der Erstansatz $At+B$ (Polynom ersten Grades), und damit der Ansatz für die spezielle Lösung:

$$y_p(t) = t^2(At + B) = At^3 + Bt^2.$$

4. Aufgabe (6+8 Punkte)

a) Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix: Charakteristisches Polynom:

$$\det\,(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & \alpha - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - \alpha\lambda + 4 = (\lambda - \alpha/2)^2 + 4 - \alpha^2/4 \stackrel{!}{=} 0.$$

Wegen $4 - \alpha^2/4 > 0$ ergeben sich komplexe Eigenwerte $\lambda_1 = \alpha/2 + i\sqrt{4 - \alpha^2/4}$ und $\lambda_2 = \alpha/2 - i\sqrt{4 - \alpha^2/4}$. Eigenwerte sind hier einfach, d.h. die algebraische Vielfachheit von λ_k ist 1, somit gleich der geometrischen Vielfachheit. Ausserdem haben wir hier Re $\{\lambda_{1,2}\} = \alpha/2$. Es folgt Instabilität, falls $\alpha > 0$. Es folgt Stabilität, jedoch keine asymptotische Stabilität, falls $\alpha = 0$.Es folgt asymptotische Stabilität, falls $\alpha < 0$.

b) Das autonome Differentialgleichungssystem lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \vec{f}(x, y) \text{ mit } \vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} (x^2 - 1)y \\ x(y^3 - 8) \end{pmatrix}.$$

Die Gleichgewichtspunkte sind die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ des Phasenraumes, für die gilt:

$$\begin{pmatrix} (x^2 - 1)y \\ x(y^3 - 8) \end{pmatrix} = \vec{f}(x, y) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (y = 0 \text{ oder } x^2 = 1) \text{ und } (x = 0 \text{ oder } y^3 = 8).$$

Im Fall $y = 0$ erhalten wir nur den Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$. Sei nun $y \neq 0$. Dann gilt $x^2 = 1$ und $(y^3 = 8)$ Wir erhalten die GGP $(1, 2)$ und $(-1, 2)$.Wir bestimmen die Jacobi-Matrix von $\vec{f}(x, v) = \begin{pmatrix} (x^2 - 1)y \\ x(y^3 - 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2y - y \\ xy^3 - 8x \end{pmatrix}$:

$$D\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 - 1 \\ y^3 - 8 & 3xy^2 \end{pmatrix}.$$

<u>GGP$(0, 0)$:</u>

$$D\vec{f}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \text{ hat das charakteristische Polynom } P(\lambda) = \lambda^2 - 8$$

Wir erhalten die EW $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{8}$ Es gilt $\lambda_1 = \sqrt{8} > 0$. Somit ist $(0, 0)$ instabiler GGP.

GGP$(1,2)$:

$$D\vec{f}(1,2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \text{ hat die EW } \lambda_2 = 4 \text{ und } \lambda_3 = 12.$$

Es folgt Instabilität für den GGP$(1,2)$.

GGP$(-1,2)$:

$$D\vec{f}(7,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \text{ hat die EW } \lambda_1 = -4 \text{ und } \lambda_2 = -12.$$

Somit ist $(-1,2)$ asymptotisch stabiler GGP.

5. Aufgabe (8 Punkte)

Laplace-Transformation der DGL ergibt

$$\mathcal{L}[\dot{y} + 4y](s) = (s+4)\mathcal{L}[y](s) - 1 \stackrel{!}{=} \mathcal{L}[u_3(t)e^{-4t}](s) = e^{-12}\mathcal{L}[u_3(t)e^{-4(t-3)}](s)$$

$$= e^{-3s-12}\mathcal{L}[e^{-4t}](s) = e^{-3s-12}\frac{1}{s+4}.$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s+4} + e^{-3s-12}\frac{1}{(s+4)^2} = \left(\mathcal{L}[e^{-4t}](s) + e^{-3s-12}\mathcal{L}[te^{-4t}](s)\right).$$

Rücktransformation mit dem Verschiebungssatz ergibt:

$$y(t) = e^{-4t} + e^{-12}(t-3)e^{-4(t-3)}u_3(t) = e^{-4t} + (t-3)e^{-4t}u_3(t).$$

6. Aufgabe (7+3 Punkte)

a) Einsetzen des Produktansatzes $u(x,t) = F(x)G(t)$ in Dgl. ergibt

$$F(x)G'(t) = u_t(x,t) = 3u_{xx}(x,t) = 3F''(x)G(t),$$

damit

$$\frac{G'(t)}{3G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda \quad (\text{ Konstante }),$$

d.h.

$$F''(x) = \lambda F(x), \quad G'(t) = 3\lambda G(t).$$

Einsetzen in die (homogenen) Randbedingungen ergibt

$$0 = u(0,t) = F(0)G(t) \text{ und } 0 = u(2\pi,t) = F(2\pi)G(t).$$

Dies fürt auf die Randbedingungen für F:

$$F(0) = F(2\pi) = 0.$$

(Sonst müsste $G(t)$ für alle t Null sein, was nur die triviale Lösung zulässt.)

Das RWP

$$F''(x) = \lambda F(x), \quad F(0) = F(2\pi) = 0$$

hat im Falle $\lambda \geq 0$ nur die triviale Lösung $F = 0$. (Begründung nicht erforderlich.) Im Falle $\lambda < 0$ ergibt sich als allgemeine Lösung der Gleichung für F:

$$F(x) = A\cos(\sqrt{|\lambda|}x) + B\sin(\sqrt{|\lambda|}x).$$

Einsetzen in die homognen Randbedingungen ergibt

$$0 = F(0) = A \text{ und } 0 = F(2\pi) = A\cos(\sqrt{|\lambda|}2\pi) + B\sin(\sqrt{|\lambda|}2\pi)).$$

Dies wird für $A = 0$ und $\sin(\sqrt{|\lambda|}2\pi) = 0$ erfüllt. $\sqrt{|\lambda|}2\pi$ muss also Nullstelle der Sinus-Funktion sein:

$$\sqrt{|\lambda|}2\pi = n\pi, \text{ d.h } \sqrt{|\lambda|} = n/2 \text{ und } \lambda = -|\lambda| = -\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{-n^2}{4}.$$

Somit gilt

$$F(x) = B\sin\left(\frac{n}{2}x\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für G ergibt sich

$$G'(t) = 3\lambda G(t) = \frac{-3n^2}{4}G(t).$$

Wir erhalten die allgemeine Lösung $G(t) = Ce^{\frac{-3n^2t}{4}}$, und damit als Lösungen

$$u(x,t) = F(x)G(t) = Ce^{\frac{-3n^2t}{4}}B\sin\left(\frac{n}{2}x\right) = ae^{\frac{-3n^2t}{4}}\sin\left(\frac{n}{2}x\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

mit neuer Konstanten $a = CB$.

b) Durch Überlagerung dieser Lösungen erhalten wir wieder eine Lösung der Dgl. mit den homognen Randbedingungen :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{-3n^2t}{4}}\sin\left(\frac{n}{2}x\right).$$

Mit der Anfangsbedingung für u folgt

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin(3x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\left(\frac{n}{2}x\right).$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$a_1 = 1 \text{ und } a_6 = 2, \text{ sonst } a_k = 0.$$

Damit lautet die Lösung des AWP

$$u(x,t) = e^{\frac{-3t}{4}}\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2e^{-27t}\sin(3x).$$