Aufgabe 1 (13 Punkte)
Betrachten Sie die Gleichung

$$x'' + 2x' + 5x = b(t).$$

(i) Geben Sie die zugehörige homogene Gleichung an und bestimmen Sie deren allgemeine reelle Lösung.

(ii) Formen Sie die homogene Gleichung in ein System erster Ordnung um und geben Sie dessen allgemeine reelle Lösung an.

(iii) Geben Sie einen zielführenden Ansatz der rechten Seite zur Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung mit $b(t) = 25t + 13e^{2t} + t\sin(t)$ an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(i) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Hinweis: Sie brauchen nicht nachzuweisen, dass die von Ihnen bestimmten Funktionen tatsächlich ein Fundamentalsystem bilden.

(ii) Ermitteln Sie eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, welche

$$x(t) = (8t^2 - 12t + 7)e^{-t}$$

als Lösung besitzt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(i) Entscheiden Sie mit Begründung, wie viele Lösungen der Gleichung

$$x' = \sin(x^2 t^2 + 1).$$

die Bedingung

$$(x(1))^2 = 4$$

erfüllen.

(ii) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x' = (2t+1)e^{-x} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Aufgabe 4 (9 Punkte)
Das System

$$\begin{aligned} x' &= -x(y^2+1) \\ y' &= e^x \sin(y) \end{aligned}$$

besitzt unendlich viele Gleichgewichtspunkte. Ermitteln Sie diese und entscheiden Sie mit Begründung jeweils, ob diese stabil, asymptotisch stabil oder instabil sind.

Aufgabe 5 (8 Punkte)
Bestimmen Sie unter Verwendung der Laplacetransformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x' + 3x = 2\delta_1(t) - 12 \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet δ_1 die in $t = 1$ zentrierte Diracsche δ-Distribution.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

(i) Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$y_t(x,t) + 4ty(x,t) - y_x(x,t) = 0.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung, welche die Gestalt

$$y(x,t) = X(x)T(t)$$

haben.

(ii) Für die partielle Differentialgleichung

$$y_t(x,t) - 3y_{xx}(x,t) = 0$$

findet man mit dem Produktansatz unter anderem die Lösungen

$$y(x,t) = e^{3\mu t}\left(c_1 \cos(\sqrt{-\mu}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\mu}x)\right)$$

für $\mu < 0$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dies darf ohne Nachweis verwendet werden. Nutzen Sie dieses Ergebnis, um eine Lösung dieser Gleichung zu bestimmen, welche die Anfangsbedingung

$$y(x,0) = 2\sin(x) - \cos(10x)$$

erfüllt.