

Aufgabe 1:

12 Punkte

Auf jede richtig angekreuzte Frage gibt es in dieser Aufgabe 1 Punkt, für jede falsch angekreuzte Frage -1 Punkt. Ist die Summe der Punktzahlen dieser Aufgabe negativ, wird sie mit 0 Punkten bewertet.

Ein zusammenhängender Graph hat mehr Kanten als Knoten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Es gibt einen planaren Graphen mit 8 Knoten und 27 Kanten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Es gibt Graphen mit chromatischer Zahl 6.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Für alle Primzahlen p, q, r ist $pqr + 1$ prim.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Sind $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $17x + 42y = 5$, dann sind x und y teilerfremd.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
$\phi(45) = 32$. [†]	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Es gibt Körper, in denen $1 + 1 + 1 = 0$ gilt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Ist I ein Ideal eines Rings R mit Eins, dann muss das Einselement von R in I enthalten sein.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Sind x, y Elemente eines Körpers mit $x \cdot y = 0$, dann muss $x = 0$ oder $y = 0$ sein.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Das Polynom $f = t^2 + 4t + 4 \in \mathbb{F}_{11}[t]$ ist irreduzibel.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Für das Polynom $f = t^3 + t^2 + t + 1 \in \mathbb{F}_2[t]$ ist der Quotientenring $\mathbb{F}_2[t]/(f\mathbb{F}_2[t])$ ein Körper.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Es gibt einen Körper mit 144 Elementen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH

[†]Dabei bezeichnet ϕ die Eulersche Funktion.

Aufgabe 1:**12 Punkte**

Auf jede richtig angekreuzte Frage gibt es in dieser Aufgabe 1 Punkt, für jede falsch angekreuzte Frage -1 Punkt. Ist die Summe der Punktzahlen dieser Aufgabe negativ, wird sie mit 0 Punkten bewertet.

Ein zusammenhängender Graph hat mehr Kanten als Knoten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Es gibt einen planaren Graphen mit 8 Knoten und 27 Kanten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Es gibt Graphen mit chromatischer Zahl 6.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Für alle Primzahlen p, q, r ist $pqr + 1$ prim.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Sind $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $17x + 42y = 5$, dann sind x und y teilerfremd.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
$\phi(45) = 32$. [†]	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Es gibt Körper, in denen $1 + 1 + 1 = 0$ gilt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Ist I ein Ideal eines Rings R mit Eins, dann muss das Einselement von R in I enthalten sein.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Sind x, y Elemente eines Körpers mit $x \cdot y = 0$, dann muss $x = 0$ oder $y = 0$ sein.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Das Polynom $f = t^2 + 4t + 4 \in \mathbb{F}_{11}[t]$ ist irreduzibel.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Für das Polynom $f = t^3 + t^2 + t + 1 \in \mathbb{F}_2[t]$ ist der Quotientenring $\mathbb{F}_2[t]/(f\mathbb{F}_2[t])$ ein Körper.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH
Es gibt einen Körper mit 144 Elementen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	WAHR	FALSCH

[†]Dabei bezeichnet ϕ die Eulersche Funktion.

Aufgabe 2:**3+2+2 Punkte**

G sei ein zusammenhängender planarer Graph, in dem es keinen Knoten vom Grad 1, aber mindestens einen Knoten w vom Grad mindestens 3 gibt.

- Zeigen Sie, dass G mindestens 3 Länder hat.
 - Zeigen Sie, dass es außer w einen weiteren Knoten vom Grad mindestens 3 gibt oder $\deg(w) \geq 4$ ist.
 - Zeichnen Sie zwei solcher Graphen, von denen einer bipartit ist und der andere nicht.
-

Aufgabe 3:**1+3+2 Punkte**

Auf einer Carrera-Bahn mit 4 Spuren veranstalten Steffi, Raman und Axel ein Wettrennen. Für eine Runde braucht Raman genau 13, Steffi 16 und Axel 11 Sekunden.

- Wie lange muss das Rennen mindestens dauern, damit irgendwann alle drei Autos gleichzeitig über die Startlinie fahren? (*Begründung!*)
 - In einer Runde fahren die drei Renner in der Reihenfolge Raman-Axel-Steffi, jeweils im Abstand von einer Sekunde, über die Startlinie. Wie lange dauert es, bis das nächste Mal alle drei gleichzeitig über die Linie fahren?
 - Im nächsten Rennen steigt auch Michael ein. Sein Wagen startet aber aufgrund technischer Defekte erst 3 Sekunden nach den anderen; für eine Runde braucht er dafür nur 10 Sekunden. Mit welchen anderen Wagen wird sein Renner irgendwann einmal gleichzeitig über die Startlinie fahren, mit welchen nicht? (*Begründung!*)
-

Aufgabe 4:**3+2+2 Punkte**

Betrachte das Polynom $f = t^2 + 2t + 3 \in \mathbb{F}_5[t]$.

- Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist.
- Geben Sie an, wieviele Elemente der Körper $K := \mathbb{F}_5[t]/(f\mathbb{F}_5[t])$ enthält. (*Begründung!*)
- Finden Sie das multiplikative Inverse zu $(4t + 4) + f\mathbb{F}_5[t]$ im Körper K .