

Aufgabensammlung zur Vorbereitung auf den schriftlichen Test

Der Umfang dieser Aufgabensammlung entspricht nicht dem Umfang des schriftlichen Tests.

In der Klausur werden wir benötigte Sätze und Definitionen angeben.

Hinweis: Die mit [Ü] gekennzeichneten Aufgaben kamen schon einmal in Übungsblättern vor.

Aufgabe 1. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- Jeder Graph ist zusammenhängend.
- Es gibt einen Graph mit 6 Knoten und 16 Kanten.
- Jeder Graph mit geradem Knotengrad an jedem Knoten besitzt einen Hamilton-Kreis.
- Jeder k -reguläre Graph mit $k \geq 2$ enthält einen Kreis.
- Jeder Graph G mit chromatischer Zahl $\chi(G)$ hat einen Maximalgrad $\Delta(G)$ von höchstens $\chi(G) - 1$.
- Jeder zusammenhängende, 4-reguläre Graph enthält eine Eulertour (Eulerkreis).
- Jeder Eulerkreis ist ein einfacher Kreis.
- Der vollständige Graph K_4 mit vier Knoten besitzt genau drei verschiedene Hamiltonkreise.

Aufgabe 2. Reguläre Graphen färben

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade und $G = (V, E)$ ein $(n - 2)$ -regulärer Graph mit n Knoten.

- a) Zeichnen Sie einen Beispielgraph G für $n = 6$.
- b) Zeigen Sie für alle geraden $n \in \mathbb{N}$, dass für die chromatische Zahl $\chi(G)$ gilt $\chi(G) = \frac{n}{2}$.

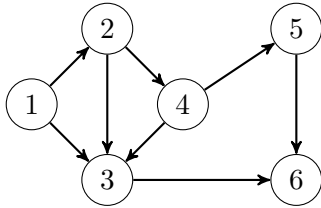
Aufgabe 3. Zusammenhängende planare Graphen

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph, in dem es keinen Knoten vom Grad eins, aber mindestens einen Knoten w vom Graph mindestens drei gibt.

- a) Zeigen Sie, dass G mindestens drei Gebiete hat.
- b) Zeigen Sie, dass es außer w einen weiteren Knoten vom Grad mindestens drei gibt oder $\deg_G(w) \geq 4$ ist.
- c) Zeichnen Sie zwei solcher Graphen, von denen einer bipartit ist und der andere nicht.

Aufgabe 4. Gerichtete Graphen und Verbände

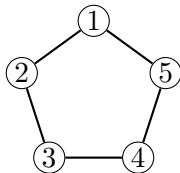
Betrachten Sie folgenden gerichteten Graphen $G = (V, E)$.



- Geben Sie den vollständigen Verband (V, \succ) an, wobei $\succ \subseteq V \times V$ eine Halbordnung ist, so dass für jedes geordnete Paar $(u, v) \in V \times V$ gilt, dass $(u, v) \in \succ$ genau dann wenn es einen gerichteten Pfad von u nach v gibt.
- Ist der so definierte Verband ein Boolescher Verband? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5. Matchings in Kreisen

Betrachten Sie folgenden Kreis C_5 .



- Finden Sie zwei größtmögliche Matchings M_1, M_2 für C mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.
- Zeigen oder widerlegen Sie, dass jeder Kreis nie mehr als zwei größtmögliche Matchings M_1, M_2 mit paarweise disjunkten Kanten hat.

Aufgabe 6. Komplementgraphen

Beweisen Sie, dass für jeden Graph G mit sechs Knoten gilt: G oder der Komplementgraph von G enthält ein Dreieck (d.h. einen Kreis mit drei Knoten).

Aufgabe 7. Kreise in vollständigen Graphen K_n

- Identifizieren Sie alle Kreise der Länge drei im K_4 .
- Wie viele Kreise der Länge r gibt es in einem vollständigen Graph K_n mit $n \geq r$ Knoten?

Aufgabe 8. Urnenmodelle

Eine Urne enthält zwei unterscheidbare schwarze Kugeln und eine weiße Kugel. Eine zweite Urne enthält zwei nicht unterscheidbare schwarze Kugeln und zwei unterscheidbare weiße Kugeln. Das folgende Experiment wird durchgeführt: Zunächst wählt man eine Urne und zieht aus ihr eine Kugel. Danach zieht man eine weitere Kugel aus der gleichen Urne, ohne die erste gezogene Kugel zurückzulegen. Die Reihenfolge des Ziehens soll dabei eine Rolle spielen.

- a) Zeichnen Sie einen Baum, der alle möglichen unterscheidbaren Experimentverläufe beschreibt.
- b) Wie viele mögliche unterscheidbare Ergebnisse hat dieses Experiment?

8	9	10	11	12	13	14	15	16
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- c) Bei wie vielen Ergebnissen wurde mindestens ein weißer Ball gezogen?

8	9	10	11	12	13	14	15	16
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- d) Bei wie vielen Ergebnissen wurden ein schwarzer und ein weißer Ball gezogen?

8	9	10	11	12	13	14	15	16
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 9. Kongruenz

- a) Berechnen Sie eine ganze Zahl $x \in \{0, 1, \dots, 41\}$, die die Kongruenzen

$$x \equiv 2 \pmod{3}, \quad x \equiv 3 \pmod{6}, \quad x \equiv 4 \pmod{7}$$

erfüllt oder zeigen Sie, dass es keine solche Zahl gibt.

- b) Berechnen Sie eine ganze Zahl $x \in \{0, 1, \dots, 41\}$, die die Kongruenzen

$$x \equiv 0 \pmod{3}, \quad x \equiv 3 \pmod{6}, \quad x \equiv 4 \pmod{7}$$

erfüllt oder zeigen Sie, dass es keine solche Zahl gibt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass aus $x \equiv 0 \pmod{3}$ direkt $x \equiv 3 \pmod{6}$ folgt.

Aufgabe 10. Persönlichkeiten und Resultate

Matchen Sie die folgenden Persönlichkeiten mit den Anwendungsgebieten ihrer entsprechenden Resultate.

Euler	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	alle Knoten besuchende Kreise
Warshall	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	bipartite Matchings
Hamilton	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Verbände
Hall	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	alle Kanten besuchende Kreise
Boole	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	transitive Hülle

Aufgabe 11. Satz von Hall [Ü]

- Beweisen Sie: Ein k -regulärer bipartiter Graph mit $k \geq 1$ enthält ein perfektes Matching.
- Beweisen Sie per Induktion: Ein k -regulärer bipartiter Graph G hat chromatischen Index $\chi'(G) = k$.

Aufgabe 12. Satz von König und Egerváry [Ü]

Beweisen Sie: Jeder bipartite Graph $G = (U \uplus V, E)$ hat ein Matching der Größe mindestens $|E|/\Delta(G)$ (wobei $\Delta(G)$ den maximalen Knotengrad in G bezeichnet).

Aufgabe 13. Unabhängige Knotenmenge [Ü]

- Zeigen Sie mit Hilfe der eulerschen Formel: Jeder planare Graph besitzt eine unabhängige Knotenmenge X mit $|X| \geq |V|/6$.
- Was können Sie mit Hilfe des Vierfarbentheorems über die Größe der größten unabhängigen Knotenmenge $|X|$ in einem planaren Graphen aussagen?

Aufgabe 14. Perfektes Matching [Ü]

Beweisen oder widerlegen Sie:

- Jeder Baum hat ein perfektes Matching.
- Jeder Baum hat höchstens ein perfektes Matching.

Aufgabe 15. Komplementgraph [Ü]

Zeigen Sie: Der Komplementgraph eines nicht zusammenhängenden Graphen ist stets zusammenhängend.

Beweisen oder widerlegen Sie die Umkehrung dieser Aussage: Der Komplementgraph eines zusammenhängenden Graphen ist stets nicht zusammenhängend.

Aufgabe 16. Induzierte Teilgraphen [Ü]

Es sein M die Menge der Graphen, deren Zusammenhangskomponenten vollständige Graphen sind. (Sie werden auch *Clustergraphen* genannt.)

Geben Sie den verbotenen induzierten Teilgraphen für M an und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.

Aufgabe 17. Längster Pfad in Turniergraphen [Ü]

Beweisen Sie, dass es in jedem Turniergraphen einen Pfad gibt, der alle Knoten des Graphen enthält.

Hinweis: Ein Pfad in einem gerichteten Graph $G = (V, A)$ ist eine Folge $(v_0, v_1, \dots, v_\ell)$ paarweise verschiedener Knoten mit $\forall i \in \{0, 1, \dots, \ell - 1\} : (v_i, v_{i+1}) \in A$, d.h. die „Kanten des Pfades“ zeigen alle „in die selbe Richtung“.