A Berlin, 04. März 2017

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Schriftliche Prüfung: Diskrete Strukturen

(Niedermeier/Molter/Chen, Wintersemester 2016/17)

Einlesezeit: 15 Minuten
Bearbeitungszeit: 60 Minuten
Max. Punktezahl: 50 Punkte

1	2	3	4	5	6	7	Σ
(4)	(4)	(6)	(8)	(11)	(7)	(10)	(50)

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber in der Farbe **schwarz** oder **blau**.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Vor- und Nachnamen sowie Matrikelnummer.
- Bei allen Multiple-Choice-Fragen ist immer **mindestens eine** Antwort richtig. Bei Ankreuzen einer falschen Antwort gibt es für die jeweilige Aufgabe **0 Punkte**!
- Ein Graph ist, falls nicht explizit anders beschrieben, immer einfach, ungerichtet und ohne Schleifen.
- Auf Seite 2 finden Sie einige Sätze aus der Vorlesung, die Sie verwenden dürfen. Nicht aufgelistete Sätze und Korollare, die aus der Vorlesung bekannt sind, dürfen ebenfalls verwendet werden und müssen **nicht** erneut bewiesen werden.
- **Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

A

Sätze aus der Vorlesung

Satz 1 („Handshaking-Theorem").
Für jeden Graph $G = (V, E)$ gilt $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2 \cdot |E|$.

Satz 2 (Zusammenhangskomponenten).
Jeder Graph $G = (V, E)$ enthält mindestens $|V| - |E|$ viele Zusammenhangskomponenten.

Satz 3 („Satz von Ore").
Erfüllt ein Graph $G = (V, E)$ die Bedingung

$$\forall x, y \in V, x \neq y, \{x, y\} \notin E\colon \deg_G(x) + \deg_G(y) \geq |V|,$$

so enthält G einen Hamiltonkreis.

Satz 4 („Satz von Euler").
Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ ist eulersch $\Leftrightarrow$ der Grad aller Knoten ist gerade.

Satz 5 („Eulersche Polyederformel").
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ebener Graph. Dann gilt $\#\text{Gebiete} = |E| - |V| + 2$.

Korollar 6 (von „Eulersche Polyederformel").
Für jeden planaren Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ gilt

$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6.$$

Satz 7 („Satz von Kuratowski").
Ein Graph ist planar gdw. er keinen Teilgraph enthält, der homöomorph zu $K_{3,3}$ oder K_5 ist.

Satz 8 („Satz von Vizing").
Es gibt einen effizienten Algorithmus, der für einen Graph $G = (V, E)$ eine Kantenfärbung mit entweder $\Delta(G)$ oder $\Delta(G) + 1$ Farben liefert.

Satz 9 („Satz von Hall").
Für einen bipartiten Graph $G = (A \uplus B, E)$ gilt:

$$G \text{ hat ein Matching } M \text{ der Kardinalität } |M| = |A|$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall X \subseteq A\colon |N(X)| \geq |X|.$$

Name: .... **A** **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 1: **Vermischtes Graphentheorie I** (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Die Antwort muss nicht begründet werden.

- ☐ Jeder zusammenhängende Graph mit geradem Knotengrad an jedem Knoten besitzt einen Euler-Kreis.
- ☐ Jeder zusammenhängende Graph hat mehr Kanten als Knoten.
- ☐ Es gibt einen planaren Graph mit 8 Knoten und 24 Kanten.
- ☐ Es gibt einen Graph mit Gradsequenz $(1, 1, 2, 3, 4)$.
- ☐ Jeder 2-reguläre bipartite Graph enthält ein perfektes Matching.

Aufgabe 2: **Vermischtes Graphentheorie II** (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Die Antwort muss nicht begründet werden

- ☐ Jeder Graph mit m Kanten und $m + 1$ Knoten ist ein Baum.
- ☐ Ein Wald mit neun Knoten und sechs Kanten enthält genau drei Bäume.
- ☐ Ein Binärbaum mit Tiefe n hat höchstens 2^n Blätter.
- ☐ Ein Binärbaum mit Tiefe n hat höchstens $2 \cdot n$ Blätter.

Aufgabe 3: **Vermischtes Zahlentheorie** (6 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Die Antwort muss nicht begründet werden.

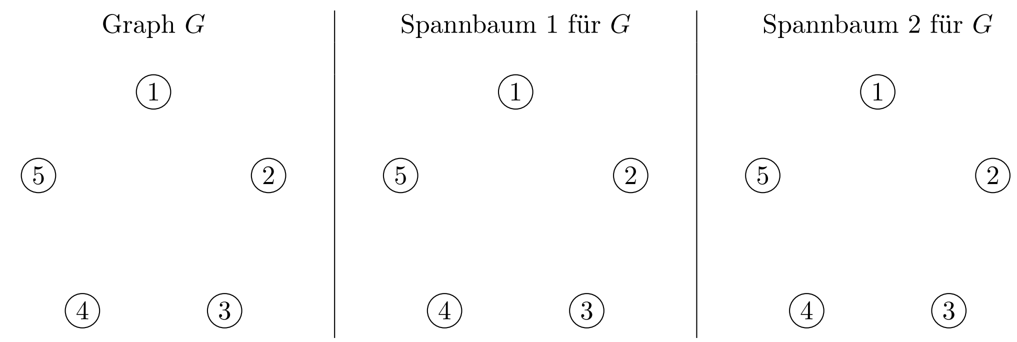
- ☐ Es gilt als bewiesen (Stand 04.03.2017), dass es unendlich viele Zwillingsprimzahlpaare gibt.
- ☐ Das kleinste gemeinsame Vielfache zweier teilerfremden Zahlen ist Eins.
- ☐ Es gibt unendlich viele Primzahlen.
- ☐ Die jede natürliche Zahl $n \geq 2$ lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.
- ☐ Der euklidische Algorithmus berechnet eine Primfaktorzerlegung einer gegebenen natürlichen Zahl.

Name: .... **A** **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 4: **Spannbäume** (4+4 Punkte)

Ein *ebener* Graph ist ein planarer Graph zusammen mit seiner Darstellung in der Ebene. Dabei muss eine Kante **nicht** unbedingt als eine gerade Linie gezeichnet werden.

a) Zeichnen Sie einen ebenen Graph G mit fünf Knoten, der mindestens zwei kantendisjunkte Spannbäume hat. Zeichnen Sie weiterhin zwei verschiedene Spannbäume. Benutzen Sie dazu folgende Vorlage.



b) Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt einen zusammenhängenden planaren Graph, der mindestens drei paarweise kantendisjunkte Spannbäume hat.

Name: .... **A** **Matr.-Nr.: ....**

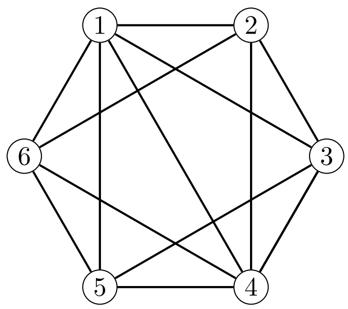
Aufgabe 5: **Isomorphe Teilgraphen** (3+4+4 Punkte)

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen *isomorph* falls es eine bijektive Funktion $f\colon V \to V'$ gibt, so dass für alle $v, w \in V$ mit $v \neq w$ gilt, dass $\{v, w\} \in E$ gdw. $\{f(v), f(w)\} \in E'$.

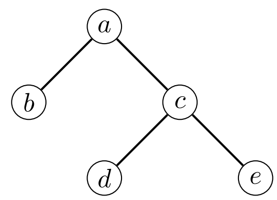
Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ heißt *Teilgraph* eines Graphen $G = (V_G, E_G)$ gdw. $V_H \subseteq V_G$ und $E_H \subseteq E_G$.

a) Gegeben seien folgender Graph G und folgender Baum T.
Zeigen Sie, dass G einen Teilgraph enthält, der isomorph zu T ist.

G:



T:



b) Sei T ein beliebiger Baum mit k Kanten. Zeigen Sie, dass jeder Graph $G = (V, E)$ mit $|V| > k$ einen Teilgraph enthält, der isomorph zu T ist, falls jeder Knoten in G mindestens Grad k hat.

Hinweis: Beschreiben Sie dazu eine Vorgehensweise, mit der Sie eine bijektive Funktion f bestimmen. Überlegen Sie sich dabei, ob es wichtig ist, mit welchem Knoten Sie beginnen.

c) Sei T ein beliebiger Baum mit k Kanten. Widerlegen Sie, dass jeder zusammenhängende Graph $G = (V, E)$ mit $|V| > k$ einen Teilgraph enthält, der isomorph zu T ist, falls $k - 1$ der durchschnittliche Knotengrad von G ist.

Name: .... **A** **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 6: **Gradsequenzen** (1+1+5 Punkte)

a) Zeichnen Sie einen Graph mit Gradsequenz $(1, 1)$.

b) Zeichnen Sie einen Graph mit Gradsequenz $(1, 1, 2, 2)$.

c) Beweisen Sie für beliebiges n, dass es einen Graph $G = (V, E)$ mit der folgenden Gradsequenz gibt:

$$S_n = (1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, n-2, n-2, n-1, n-1, n, n).$$

Benutzen Sie folgende Notation: Für beliebiges $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ entsprechen $a_i, b_i \in V$ den Knoten in V, die jeweils Grad i haben.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass Sie einen Graph mit Gradsequenz

$$S_{n-2} = (1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, n-2, n-2)$$

gegeben haben. Zeigen Sie wie man aus diesem Graph einen Graph mit der Gradsequenz S_n konstruieren kann.

Name: .... **A** **Matr.-Nr.: ....**

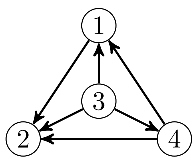
Aufgabe 7: **Turniergraphen** (2+3+5 Punkte)

Ein *Turniergraph* ist ein einfacher, gerichteter Graph $D = (V, A)$, der für alle Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ entweder $(u, v) \in A$ oder $(v, u) \in A$ enthält.

Ein *Hamiltonpfad* in einem gerichteten Graph $D = (V, A)$ ist ein Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_{|V|})$, bei dem für alle $i \in \{1, 2, \ldots, |V| - 1\}$ gilt, dass $(v_i, v_{i+1}) \in A$.

Ein *Hamiltonkreis* in einem gerichteten Graph $D = (V, A)$ ist ein Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_{|V|}, v_1)$ für das gilt, dass $(v_1, v_2, \ldots, v_{|V|})$ ein Hamiltonpfad ist und $(v_{|V|}, v_1) \in A$.

a) Geben Sie einen Hamiltonpfad des folgenden Tuniergraphen an.



b) Widerlegen Sie, dass jeder Turniergraph ohne Hamiltonkreis einen eindeutigen Hamiltonpfad enthält.

c) Beweisen Sie, dass jeder Turniergraph einen Hamiltonpfad enthält.