A Berlin, 31. Juli 2018

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Schriftliche Prüfung: Diskrete Strukturen

(Niedermeier/Froese/Zschoche, Sommersemester 2018)

Einlesezeit:	15 Minuten
Bearbeitungszeit:	60 Minuten
Max. Punktezahl:	50 Punkte

1	2	3	4	5	6	7	Σ
(4)	(4)	(4)	(6)	(10)	(8)	(14)	(50)

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber in der Farbe **Schwarz** oder **Blau**.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Vor- und Nachnamen sowie Matrikelnummer.
- Bei allen Multiple-Choice-Fragen ist immer **mindestens eine** Antwort richtig. Bei Ankreuzen einer falschen Antwort gibt es für die jeweilige Aufgabe **0 Punkte**!
- **Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Hinweise zum Inhalt:

- Auf Seite 7 finden Sie einige Begriffsdefinitionen aus der Vorlesung.
  Sätze und Korollare, die aus der Vorlesung bekannt sind, dürfen verwendet werden und müssen **nicht** erneut bewiesen werden.
- Ein Graph ist in dieser schriftlichen Prüfung immer einfach, ungerichtet und ohne Schleifen.

Viel Erfolg!

Name: .... **A** **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 1: **Vermischtes Graphentheorie** (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (ohne Begründung)

- ☐ Jeder Graph mit n Knoten und $n-1$ Kanten ist ein Baum.
- ☐ Jeder zusammenhängende Graph mit mehr Kanten als Knoten enthält einen Kreis.
- ☐ Jeder eulersche Graph enthält einen Hamiltonkreis.
- ☐ Es gibt einen Graph, der keinen planaren Teilgraphen enthält.

Aufgabe 2: **Graphisomorphie** (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (ohne Begründung)

- ☐ Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten ist für je zwei isomorphe Graphen gleich.
- ☐ Kein Graph ist isomorph zu seinem Komplementgraph.
- ☐ Es existieren zwei nichtisomorphe Graphen mit der Gradsequenz $(1,1,2,2,2)$.
- ☐ Zwei isomorphe Graphen sind entweder beide planar oder beide nicht planar.
- ☐ Alle Graphen mit der Gradsequenz $(3,3,3,3)$ sind paarweise isomorph.

Aufgabe 3: **Graphkombinatorik** (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (ohne Begründung)

- ☐ Ein vollständiger Graph mit 10 Knoten besitzt genau $\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}$ verschiedene Matchings der Größe 5.
- ☐ Ein Graph mit n Knoten hat höchstens $2^{\binom{n}{2}}$ verschiedene Teilgraphen. (Wir zählen auch isomorphe Teilgraphen.)
- ☐ In einem Graphen mit n Knoten hat jedes Matching höchstens Größe $n/2$.
- ☐ Der Graph $G=(V,E)$ mit $V=\{a,b,c\}$ und $E=\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$ hat 6 verschiedene gültige Knotenfärbungen mit den Farben $\{1,2,3\}$.

Name: .... **A** **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 4: **Modellieren mit Graphen** (6 Punkte)

Modellieren Sie folgende Problemstellung durch ein Graphproblem. Geben Sie hierfür die Definitionen der Knoten- und Kantenmenge an und erklären Sie kurz, welches Graphproblem gelöst werden muss.

In einem Unternehmen soll eine neue Software eingesetzt werden. Alle Mitarbeiterinnen sollen die neue Software benutzen können. Daher werden einige Mitarbeiterinnen zu Fortbildungskursen geschickt, um die Software kennenzulernen. Aus Kostengründen möchte man möglichst wenige Mitarbeiterinnen fortbilden, sodass jede Mitarbeiterin, die keine Fortbildung gemacht hat, mit mindestens einer anderen Mitarbeiterin zusammenarbeitet, die einen Fortbildungskurs besucht hat (für jede Mitarbeiterin ist bekannt, mit wem sie zusammenarbeitet).

Name: .... **A** **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 5: **Bäume** (2+2+6 Punkte)

(a) Geben Sie einen Baum mit fünf Knoten an, der keinen Pfad der Länge vier hat. (ohne Begründung)

(b) Sei $G = (V, E)$ mit $V = V_1 \uplus V_2 \ldots \uplus V_k$ und $V \neq \emptyset$ ein Graph, dessen $k \geq 1$ Zusammenhangskomponenten $G[V_1], \ldots, G[V_k]$ alle Bäume sind. Wie viele Kanten hat G?

(c) Niedermeier hätte gerne folgenden „Satz“ in der Vorlesung gebracht.

Behauptung: Jeder Baum mit $n \geq 2$ Knoten enthält einen Pfad der Länge $n - 1$.

Leider ist die Behauptung falsch. Welche Aussage im folgenden „Beweis“ ist nicht korrekt? Benennen und erklären Sie konkret den Fehler in der Argumentation.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung mittels vollständiger Induktion über die Anzahl n der Knoten.

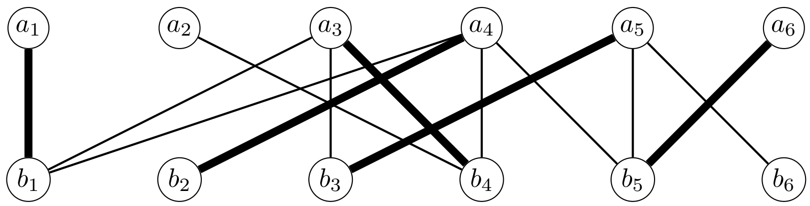
Induktionsanfang: Jeder Baum mit $n = 2$ Knoten ist offensichtlich ein Pfad der Länge 1.
Induktionsvoraussetzung: Für beliebiges aber festes $n \geq 2$ gilt die Behauptung.
Induktionsschritt: Sei $G = (V, E)$ ein Baum mit $n+1$ Knoten und $v \in V$ ein Endpunkt des längsten Pfades P in G. Der Knoten v ist ein Blatt in G, andernfalls ist P nicht der längste Pfad. Nun entfernen wir den Knoten v und die zu v inzidente Kante aus G. Sei G' der resultierende Graph. Bemerke, dass G' ein Baum mit n Knoten ist. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen Pfad P' der Länge $n - 1$ in G'. Durch das Hinzufügen von v wird dieser Pfad um eins verlängert. Damit hat der längste Pfad P in G die Länge n. $\square$

Name: .... **A** **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 6: **Matching** (2+3+3 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Matching $M \subseteq E$. Ein augmentierender Pfad ist ein Pfad in G, dessen Endpunkte von M nicht überdeckt sind und der abwechselnd eine Kante aus $E \setminus M$ und M enthält.

(a) Im folgenden Graph sind die Kanten eines Matchings **fett** gekennzeichnet. Zeichnen Sie einen augmentierenden Pfad ein. (ohne Begründung)



(b) Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Matching $M \subseteq E$. Beweisen Sie, dass M nicht größtmöglich ist, falls es einen augmentierenden Pfad $P = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ mit $\ell \geq 1$ gibt.

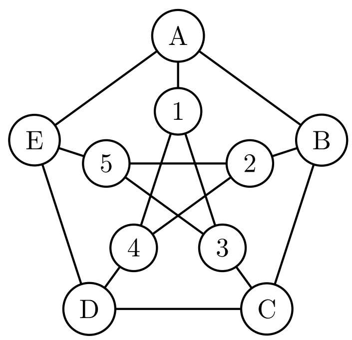
(c) Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Matching $M \subseteq E$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass jede Knotenüberdeckungsmenge mindestens $|M|$ Knoten enthält.

Name: .... **A** **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 7: **Kreiskritische Knotenmenge** (3+4+7 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Knotenmenge $S \subseteq V$ heißt *kreiskritisch*, wenn jeder Kreis in G mindestens einen Knoten von S enthält.

(a) Zeichnen Sie eine kreiskritische Knotenmenge der Größe 3 ein. (ohne Begründung)



(b) Beweisen Sie, dass jede Knotenüberdeckungsmenge eines beliebigen Graphen G kreiskritisch ist.

(c) Beweisen Sie, dass Ihre kreiskritische Knotenmenge aus (a) kleinstmöglich ist.

Wiederholung von Begriffen aus der Vorlesung

Definition 1. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Teilmenge $S \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeckungsmenge* von G, wenn gilt $\forall\{v, w\} \in E : v \in S \vee w \in S$.

Definition 2. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Teilmenge $D \subseteq V$ heißt *dominierende Menge* von G, wenn gilt $\forall v \in V \setminus D : D \cap N_G(v) \neq \emptyset$.

Definition 3. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Teilmenge $I \subseteq V$ heißt *unabhängige Menge* von G, wenn gilt $\forall v, w \in I : \{v, w\} \notin E$.

Definition 4. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein *Hamiltonkreis* in G ist ein Kreis in G, der jeden Knoten in V genau einmal enthält.

Definition 5. Eine *Eulertour* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein Weg, der jede Kante des Graphen genau einmal enthält und dessen Anfangs- und Endknoten identisch sind. Ein Graph, der eine Eulertour enthält, heißt *eulersch*.

Definition 6. Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen *isomorph*, falls es eine bijektive Funktion $f : V \to V'$ gibt, sodass für alle $v, w \in V$ mit $v \neq w$ gilt, dass $v, w \in E$ genau dann wenn $\{f(v), f(w))\} \in E'$.

Definition 7. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ und $\deg_G(v_1) \leq \deg_G(v_2) \leq \cdots \leq \deg_G(v_n)$. Dann heißt $(\deg_G(v_1), \deg_G(v_2), \ldots, \deg_G(v_n))$ *Gradsequenz* von G.

Definition 8. Eine *Knotenfärbung* eines Graphen $G = (V, E)$ mit k Farben ist eine Abbildung $c\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$, sodass gilt $\forall\{u, v\} \in E\colon c(u) \neq c(v)$. Die *chromatische Zahl* $\chi(G)$ ist die minimale Anzahl von Farben, die für eine Knotenfärbung von G benötigt werden.

Definition 9. Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ heißt *Teilgraph* eines Graphen $G = (V_G, E_G)$ genau dann wenn $V_H \subseteq V_G$ und $E_H \subseteq E_G$. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $V' \subseteq V$. Dann heißt $G[V'] := (V', E')$ mit $E' := \{\{u, v\} \mid (\{u, v\} \in E) \wedge (\{u, v\} \subseteq V')\}$ der durch V' *induzierte Teilgraph* von G.

Definition 10. Ein *Weg (Kantenzug)* der Länge ℓ in einem Graph $G = (V, E)$ ist eine Folge $(v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ von Knoten aus V mit $\forall i \in \{0, 1, \ldots, \ell - 1\}\colon \{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Ein *Pfad* in G ist ein Weg, in dem alle Knoten paarweise verschieden sind. Ein *Kreis* der Länge $\ell \geq 3$ in $G = (V, E)$ ist ein Weg $(v_1, v_2, \ldots, v_\ell, v_1)$ mit ℓ verschiedenen Knoten.