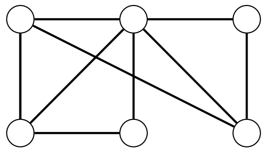
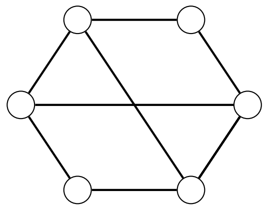
Gedächtnisprotokoll Diskrete Strukturen 2020.2

1. Eigenschaften angeben (20 Punkte)

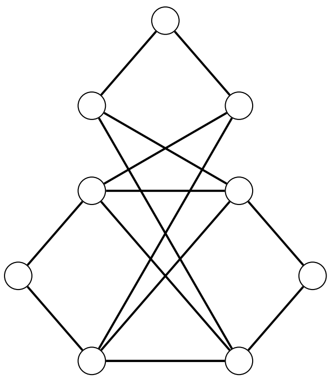
G_1 :



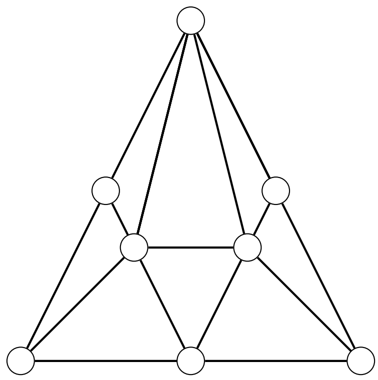
G_2 :



G_3 :



G_4 :



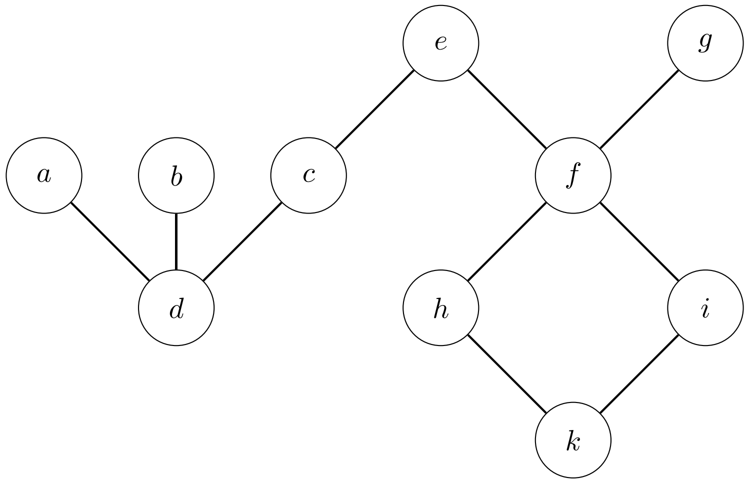
1. G_i hat C_4 als indizierten Teilgraphen
2. G_i ist bipartit
3. G_i hat Hamiltonkreis
4. Chromatischer Index $x'(G) = 3$.
5. planar
6. Knotenüberdeckung der Größe ≤ 4

2. Bäume (7+7+7 Punkte)

- Aussage richtig $\Rightarrow$ Beweis angeben
- Aussage falsch $\Rightarrow$ Konkretes Gegenbeispiel angeben

1. Jeder Baum mit einer geraden Anzahl von Knoten enthält ein perfektes Matching.
2. Für jeden Baum $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ gilt $\chi(G) \leq \chi'(G)$.
3. Jeder Graph $G = (V, E)$ mit $\Sigma_{v \in V} \deg_G(v) = 2(|V| - 1)$ und $\deg_G(v) > 0$ für alle $v \in V$ ist ein Baum.

3. Matching (4+6+10 Punkte)

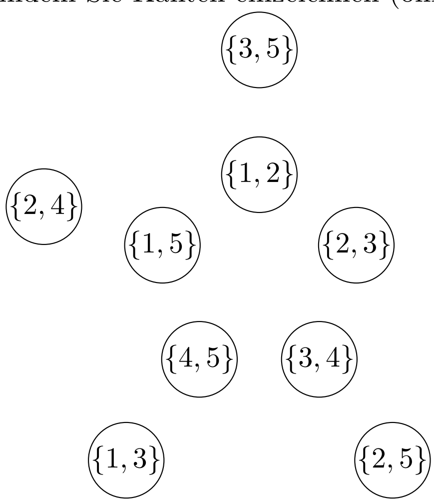


1. Finden Sie ein größtmögliches Matching im folgenden Graphen und geben Sie dieses (ohne Begründung) in Mengenschreibweise an, also z.B. $\{\{a, d\}, \{e, f\}, \ldots, \}$.
2. Zeigen Sie, dass der oben angegebene Graph bipartit ist; verwenden Sie den Satz von Konig und Egervary um zu beweisen, dass Ihr Matching aus 3.1. tatsächlich größtmöglich ist.
3. Beweisen Sie: Jeder 3-reguläre, bipartite Graph hat ein perfektes Matching.
   Hinweis: Verwenden Sie den „Heiratssatz“ von Hall.

4. Graphenkombinatorik

Für zwei natürliche Zahlen n und k mit $k \leq [n/2]$ sei der ungerichtete Graph $G(n, k)$ wie folgt definiert: Die Menge der Kanten korrespondiert zur Menge der k-elementigen Teilmengen von $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ und zwei Knoten sind genau dann mit einer Kante verbunden, wenn die beiden korrespondierenden Mengen disjunkt sind.

1. Im Folgenden sehen Sie die Knotenmenge des $G(5, 2)$. Vervollständigen Sie den Graphen, indem Sie Kanten einzeichnen (ohne Begründung).



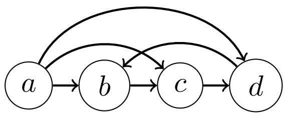
2. Wie viele Knoten hat der $G(n, k)$? (nur Angabe)
3. Wie ist der Grad jedes Knoten im $G(n, k)$ Begründen Sie ihre Antwort.

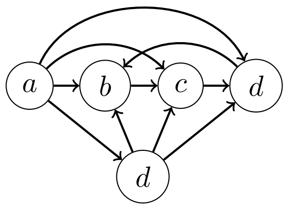
4. Wie viele Kanten hat der $G(n,k)$? Begründen Sie ihre Antwort.
5. Zu welchem aus der Vorlesung bekannten Graphen ist $G(n,1)$ isomorph?

5. Turniergraphen

Ein Turniergraph ist ein gerichteter Graph $D = (V, A)$, der für jedes Knotenpaar $u, v \in V$ mit $u \neq v$ genau eine der beiden Kanten (u, v) und (v, u) enthält. (Ein Turniergraph enthält keine Loops, also keine Kanten der Form (v, v).)

1. Wie viele Kanten enthält ein Turniergraph mit n Knoten? (nur Angabe)
2. Geben Sie (ohne Begründung) für die folgenden beiden Turniergraphen D_1 und D_2 jeweils <u>alle</u> gerichteten Hamiltonpfade an.

D_1 :


D_2 :


3. Beweisen Sie, dass jeder Turniergraph einen gerichteten Hamiltonpfad enthält.
   Hinweis: Beweisen Sie die Aussage mittels vollständiger Induktion über die Anzahl der Knoten $|V|$ eines Turniergraphen.

Wiederholung von Begriffen aus der Vorlesung

Die folgenden Definitionen beziehen sich auf *ungerichtete* Graphen. Für einen Knoten $v \in V$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist die **Nachbarschaft von v** definiert als $N_G(v) := u \in V|\{v, u\} \in E$. Der Grad von v ist definiert als $deg_G(v) := |N_G(v)|$. Ein Graph heißt k-regulär, falls für alle $v \in V$ gilt: $deg_G(v) = k$.

Ein **Weg** der Länge $\ell \in N$ in einem Graph $G = (V, E)$ ist eine Folge $(v_0, v_1, ..., v_\ell)$ von Knoten aus V mit $\forall i \in \{0, 1, ..., \ell - 1\} : \{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Ein **Pfad** in G ist ein Weg, in dem alle Knoten paarweise verschieden sind. Ein **Kreis** der Länge $\ell \geq 3$ in $G = (V, E)$ ist ein Weg $(v_1, v_2, ..., v_\ell, v_1)$ mit ℓ verschiedenen Knoten.

Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ heißt **Teilgraph** eines Graphen $G = (V_G, E_G)$ genau dann wenn $V_H \subseteq V_G$ und $E_H \subseteq E_G$. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $V' \subseteq V$. Dann heißt $G[V'] := (V', E')$ mit $E' := \{\{u, v\}|(\{u, v\} \in E) \wedge (\{u, v\} \subseteq V')\}$ der durch V' **induzierte Teilgraph** von G.

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **bipartit** falls V in zwei disjunkte Mengen V_1, V_2 zerlegt werden kann, so dass für jede Kante $e = \{v, w\} \in E$ gilt: $|e \cap V_1| = |e \cap V_2| = 1$.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein **Hamiltonkreis** in G ist ein Kreis in G, der jeden Knoten in V genau einmal enthält.

Ein Graph heißt **planar**, wenn man ihn so zeichnen ("in die Ebene einbetten") kann, dass sich keine Kanten kreuzen.

Eine **Knotenfärbung** eines Graphen $G = (V, E)$ mit k Farben ist eine Abbildung $c : V \to \{1, 2, ..., k\}$, sodass gilt $\forall \{u, v\} \in E : c(u) \neq c(v)$. Die **chromatische Zahl** $\chi(G)$ ist die minimale Anzahl von Farben, die für eine Knotenfärbung von G benötigt werden.

Eine **Kantenfärbung** eines Graphen $G = (V, E)$ mit k Farben ist eine Abbildung $c : E \to \{1, 2, ..., k\}$, sodass gilt $\forall e, f \in E, e \neq f, e \cap f \neq \emptyset : c(e) \neq c(f)$. Der **chromatische Index** $\chi'(G)$ ist die minimale Anzahl von Farben, die für eine Kantenfärbung von G benötigt wird.

Eine **Knotenüberdeckung** eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge $Q \subseteq V$, die mindestens einen Endknoten jeder Kante aus E beinhaltet. Die Größe einer Knotenüberdeckung ist die Anzahl der Knoten $|Q|$.

Eine Kantenmenge $M \subseteq F$ heißt **Matching** in einem Graphen $G = (V, E)$ falls kein Graphknoten zu mehr als einer Kante aus M inzident ist; formal: $\forall e, f \in M, e \neq f : e \cap f = \emptyset$. Ein Matching M heißit **perfekt**, wenn jeder Graphknoten zu genau einer Kante aus M inzident ist, also für alle $v \in V$ existiert eine Kante $e \in M$ sodass $v \in e$.