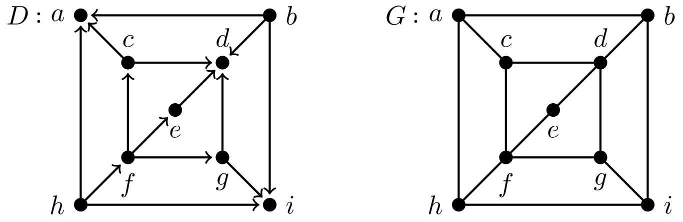
1

10+16+20+20=66 Punkte

Wir Definieren einen gerichteten Graphen $D = (V, A)$ und einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ durch:



(i) Geben Sie eine topologische Sortierung für D an. Sie müssen ihre Antwort nicht begründen.

(ii) Geben sie ein größtmögliches Matching für G an, begründen sie, warum Ihr Matching größtmöglich ist.

(iii) Zeigen Sie: Wenn die topologische Sortierung eines gerichteten, azyklischen Graphen $D = (V, A)$ eindeutig ist, dann enthält D einen gerichteten Pfad der Länge $|V| - 1$.

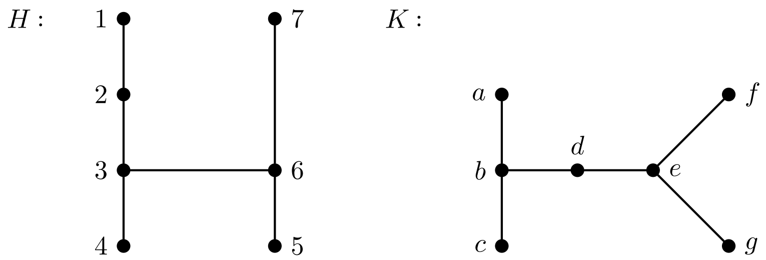
Für einen gerichteten Graphen $D = (V, A)$ definieren wir für einen Knoten $v \in V$ den Eingrad $\text{in-deg}_D(v) = |\{(u, v) \mid (u, v) \in A\}|$ und den Ausgrad $\text{out-deg}_D(v) = |\{(v, u) \mid (v, u) \in A\}|$.

(iv) Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph, zeigen Sie: Wenn für alle $v \in V$ gilt, dass $\text{in-deg}_D(v) \geq 1$, dann enthält D einen Kreis.

2

14+14+20+20=68 Punkte

(i) Zeigen sie H und K sind homöomorph.



(ii) Geben Sie einen Graphen mit 6 Knoten und 13 Kanten an, oder begründen sie warum so ein Graph nicht existiert.

(iii) Sei $R = (V, E)$ ein Graph und seien T_1, T_2 kantendisjunkte Spannbäume von R. Zeigen Sie für jede Kante $\{x, u\} \in E$ gibt es einen Kreis in R, der die Kante $\{x, u\}$ enthält.

(iv) Zeigen Sie: Sei $H' = (U, F)$ ein 3-regulärer Graph, welche einen Hamiltonkreis mit der Kantenmenge F' enthält, dann ist $F \backslash F'$ ein perfektes Matching in H'.

3

4+8+16+14+24=66 Punkte

Sie dürfen nur Zahlen $< p^2$ explizit verwenden.

(i) Geben sie ohne Begründung die Primfaktorzerlegung von 189 an.

(ii) Bestimmen Sie $\varphi(189)$.

(iii) Berechnen Sie $10^{11^{13}} (\mathrm{mod} 12)$.

(iv) Verschlüsseln sie die Nachricht $M = 8$ mit dem RSA-Schlüssel $(9, 22)$.

(v) Zeigen Sie: Es existiert einen Menge $P \subseteq \{5, 6, \dots\}$, sodass für alle $p \in P$ gilt $p \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$ und für alle verschiedenen $p_1, p_2 \in P$ gilt $p_1 \nmid p_2$ und $p_2 \nmid p_1$.