

2. Schriftlicher Test Diskrete Strukturen

Punkte: Insgesamt sind in dieser Teilleistung 200 Testpunkte zu erreichen. 4 Testpunkte entsprechen einem Portfoliopunkt. Es können maximal 50 Portfoliopunkte erarbeitet werden.

Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

Hilfsmittel: Außer einem nicht-programmierbaren Taschenrechner sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Alle Antworten sind zu begründen, es sei denn dies wird **explizit** ausgeschlossen.

Aufgabe 1

8 + 32 + 24 = 64 Punkte

Wichtig: Geben Sie nachvollziehbare Berechnungsschritte an. Bei Berechnung eines Wertes Modulo p dürfen Sie insbesondere keine Zahlen größer als p^2 explizit verwenden.

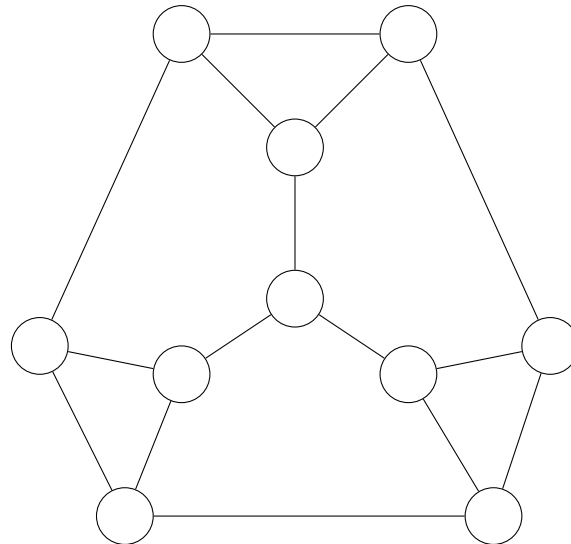
Die Menge \mathbb{N}^+ enthält die natürlichen Zahlen ohne die 0.

- (i) Geben Sie die Primzahlfaktorzerlegung von 220 an und bestimmen Sie $\varphi(220)$.
- (ii) Verschlüsseln Sie die Nachricht $M = 8$ durch den RSA-Algorithmus mit dem öffentlichen Schlüssel $(e, n) = (7, 15)$.
- (iii) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über i : $6^i \bmod 14 \in \{6, 8\}$ für alle Zahlen $i \in \mathbb{N}^+$.

Aufgabe 2

24 + 20 + 32 = 76 Punkte

- (i) Geben Sie zwei nicht-isomorphe Graphen X und Y an, sodass X und Y jeweils genau 5 Knoten und genau 7 Kanten enthalten. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.
- (ii) Geben Sie eine Knotenfärbung des folgenden Graphen an, welche so wenig Farben wie möglich benutzt. Färben Sie die Knoten, indem Sie Zahlen in die leeren Felder schreiben. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.

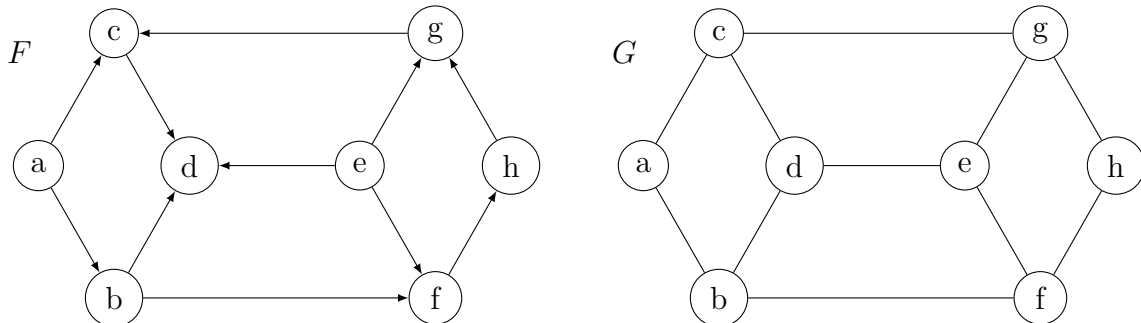


- (iii) Sei $H = (V, E)$ ein Graph. Sei $X \subseteq V$ so, dass $H - X$ kreisfrei ist. Zeigen Sie: H hat eine Knotenfärbung mit $|X| + 2$ Farben.

Aufgabe 3

16 + 20 + 24 = 60 Punkte

Wir definieren den gerichteten Graphen $F = (V, A)$ und den ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ über folgende Zeichnungen.



- (i) Geben Sie eine topologische Sortierung für die Knoten von F an, zum Beispiel als Zeichenfolge abc.... Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.
- (ii) Geben Sie ein größtmögliches Matching für G an. Begründen Sie insbesondere, warum Ihr gewähltes Matching größtmöglich ist.

Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph. Wir definieren für alle Knoten $v \in V$ den *Eingrad* $\text{in-deg}_D(v) = |\{(u, v) \mid (u, v) \in A\}|$ und den *Ausgrad* $\text{out-deg}_D(v) = |\{(v, u) \mid (v, u) \in A\}|$.

Die Menge \mathbb{N}^+ enthält die natürlichen Zahlen ohne die 0.

- (iii) Sei $k \in \mathbb{N}^+$ beliebig. Zeigen Sie: Wenn für alle $v \in V$ gilt, dass $\text{in-deg}_D(v) \geq k$, dann enthält D einen Knoten u mit $\text{out-deg}_D(u) \geq k$.