Diskrete Strukturen Abschlusstest

Weller, Ersttermin (24. Juli 2023)

SoSe 2023

Bemerkung

Die auf dem Deckblatt gegebene Punkteverteilung entspricht nicht der Tatsächlichen.
Aufgabe 1: 16,
Aufgabe 2: 10,
Aufgabe 3: 7,
Aufgabe 4: 17.
Zusätzlich war der Satz von Hall auf dem Deckblatt gegeben.

Technische Universität Berlin, 24.07.2023

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Schriftlicher Test: Diskrete Strukturen

(Weller/Froese/Kunz/Peters, Sommersemester 2023)

Bearbeitungszeit:	60 Minuten
Max. Punktzahl:	50 Punkte

Aufgabe Nr.:	1	2	3	4	**Summe**
Punktzahl:	18	10	6	16	50
Davon erreicht:					

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber in der Farbe **Schwarz** oder **Blau**.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Vor- und Nachnamen sowie Matrikelnummer.
- **Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**
- Sätze und Korollare, die aus der Vorlesung bekannt sind, dürfen verwendet werden und müssen **nicht** erneut bewiesen werden.

Hinweise zum Inhalt: Ein Graph ist in dieser schriftlichen Prüfung immer einfach, ungerichtet und ohne Schleifen. Der vollständige Graph mit n Knoten und $\binom{n}{2}$ Kanten wird mit K_n bezeichnet. Der vollständig bipartite Graph $(U \uplus V, E)$ mit $|U| = n$, $|V| = m$ und $|E| = n \cdot m$ wird mit $K_{n,m}$ bezeichnet.

Für einen Graphen $G = (V, E)$ definieren wir Folgendes.

- Die Nachbarschaft $N(v)$ eines Knotens $v \in V$ ist definiert als $N(v) := \{u \in V \mid \{v, u\} \in E\}$.
- Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ heißt *Teilgraph* von G falls $V_H \subseteq V$ und $E_H \subseteq E$.
- Für jedes $X \subseteq V$ heißt $G[X] := (X, E')$ mit $E' := \{\{u, v\} \mid (\{u, v\} \in E) \wedge (\{u, v\} \subseteq X)\}$ der durch X *induzierte Teilgraph* von G.
- Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ heißt *isomorph* zu G falls es eine Bijektion $f\colon V \to V_H$ gibt, sodass gilt $\forall_{v,w \in V}\ \{v, w\} \in E \iff \{f(v), f(w))\} \in E'$.
- Ein *Weg* der Länge ℓ in G ist eine Folge $(v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ von Knoten aus V mit $\forall_{0 \leq i < \ell}\{v_i, v_{i+1}\} \in E$.
- Ein *Pfad* in G ist ein Weg, in dem alle Knoten paarweise verschieden sind.
- Ein *Kreis* der Länge $\ell \geq 3$ in G ist ein Weg $(v_1, v_2, \ldots, v_\ell, v_1)$ mit ℓ verschiedenen Knoten.
- Ein *Hamiltonkreis* in G ist ein Kreis in G, der jeden Knoten genau einmal enthält.
- Eine *Eulertour* in G ist ein Weg, der jede Kante des Graphen genau einmal enthält und dessen Anfangs- und Endknoten identisch sind. Ein Graph, der eine Eulertour enthält, heißt *eulersch*.
- Eine *k-Färbung* von G ist eine Funktion $c\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$, sodass gilt $\forall_{\{u,v\} \in E}\ c(u) \neq c(v)$.
- Die *chromatische Zahl* $\chi(G)$ von G ist die kleinste Zahl k, für die G eine k-Färbung hat.
- G ist ein *Baum* falls G zusammenhängend und kreisfrei ist.
- Ein *Spannbaum* von G ist ein Teilgraph $T = (V, E_T)$, der ein Baum ist.
- Eine Teilmenge $S \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeckungsmenge*, falls $\forall_{e \in E} e \cap S \neq \emptyset$.
- Eine Teilmenge $S \subseteq V$ heißt *dominierende Menge*, falls $\forall_{v \in V \setminus S} S \cap N(v) \neq \emptyset$.
- Eine Teilmenge $S \subseteq V$ heißt *unabhängige Menge*, falls $\forall_{v,w \in S}\{v, w\} \notin E$.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

a) Zeigen oder Widerlegen sie: Es existiert ein Graph, der einen *Hamiltonkreis*, aber keine *Eulertour* enthält.

4 Punkte

b) Geben sie einen Graphen mit n Knoten an, welcher *nicht planar* ist und nicht mehr als *3n-6* Kanten besitzt.

4 Punkte

c) Geben sie einen Graphen an, der *planar*, aber nicht *dreifärbbar* ist.

4 Punkte

d) Gegeben sei ein bipartiter Graph $G = (U \uplus V, E)$ mit $|U| = |V|$. Zudem gilt $\exists x \in U.\ deg_G(x) \in \{1, 2, ..., |U|\}$. Zeigen Sie, dass ein perfektes Matching in G existiert.

4 Punkte

Aufgabe 2

Sei $R \subseteq A \times A$ eine symmetrische Realtion von A nach A. Sei G der *Relationsgraph* zu R mit $G = (A, E_R)\,, \quad E_R := \{\{a, b\} \mid (a, b) \in R \wedge a \neq b\}$.

a) Geben sie ein R und A an, sodass der dazugehörige Relationsgraph nicht vollständig verbunden ist oder zeigen sie, dass solche R und A nicht existieren.

2 Punkte

b) Zeigen sie, dass für alle A jede Zusammenhangskomponente des zugehörigen Relationsgraphen G vollständig verbunden ist, falls die Relation R transitiv ist.

8 Punkte

Aufgabe 3

Modellieren sie das folgende Problem mit Graphen.

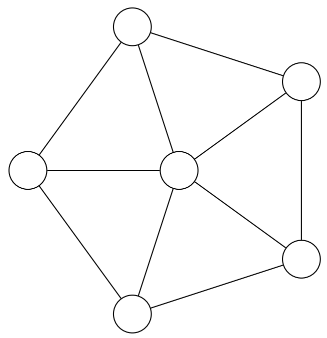
1. Geben sie die Bedeutung der Knoten und Kanten an.
2. Geben sie an, womit das Problem gelöst werden kann.
3. Begründen sie kurz, warum ihr Modell das gegebene Problem löst.

Sie wollen Module für ihr nächstes Semester wählen. Einige Module überscheiden sich in der Zeit, in der sie stattfinden. Sie können keine zwei sich überschneidenen Module belegen. Sie möchten so viele Module wie möglich belegen.

7 Punkte

Aufgabe 4

a) Zeichnen sie zwei kantendisjunkte Spannbäume in folgenden Graphen, indem sie jede der Kanten eindeutig mit 1 oder 2 beschriften.

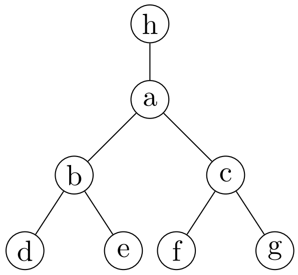


4 Punkte

b) Beweisen sie, dass jeder 3-reguläre Graph mit $n \geq 10$ Knoten keine zwei vollständig diskjunkten Spannbäume besitzen kann.

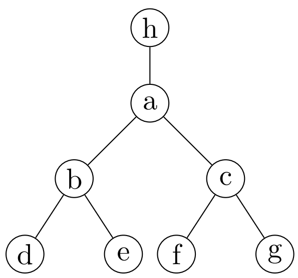
4 Punkte

c) Geben sie für folgenden Graphen ein maximales, aber nicht größtmögliches Matching an. Zeigen sie, dass ihr Matching maximal, aber nicht größtmöglich ist.



4 Punkte

d) Geben sie für folgenden Graphen ein größtmögliches, aber nicht perfektes Matching an. Zeigen sie, dass ihr Matching größtmöglich, aber nicht perfekt ist.



5 Punkte