Technische Universität Berlin **SoSe 2019**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozenten: A. Gündel-vom Hofe, M. Heida, R. Schneider

Probeklausur 2
„Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Hinweise:

- Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
- Geben Sie Ihre Lösungen in Reinschrift auf DIN A4-Blättern ab.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren werden nicht gewertet.
- **In den Aufgaben 1–3 ist nur das Ergebnis gefragt und auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Geben Sie keine Rechnungen an.**
- **In den Aufgaben 4–9 ist immer ein vollständiger Lösungsweg anzugeben (Rechnung und/oder Begründung).**

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Bei der Klausur sind 80 Punkte erreichbar. Die Klausur ist mit 40 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

1. Aufgabe (10 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

a) [2 Punkte] Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem als $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 2x_2 &= 7 \end{aligned}$$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

b) [3 Punkte] Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

normierte Zeilenstufenform: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

c) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des reellen linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 - 3x_4 \\ 2 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ 3 \end{bmatrix} \middle| x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

d) [3 Punkte] Die normierte Zeilenstufenform von $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ist $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Bestimmen Sie $\text{Rang}(A)$ und eine Basis von $\text{Bild}(A)$:

$\text{Rang}(A) = 2$ $\qquad$ Basis von $\text{Bild}(A)$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Lösung. a) [2 Punkte] Es ist

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -5x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

b) [3 Punkte] Mit dem Gauß-Algorithmus für $[A, \vec{b}]$ ist:

$$[A, \vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \overset{\substack{II-2I \\ \frac{1}{3}III}}{\to} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{II \leftrightarrow III}{\to} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\overset{\substack{I-III \\ II-III}}{\to} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{I-II}{\to} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Dies ist die normierte Zeilenstufenform (NZSF) von $[A, \vec{b}]$.

c) [2 Punkte] Die Pivotvariablen sind x_1, x_2, x_5, und x_3, x_4 sind frei wählbar. Rückwärts einsetzen ergibt: $x_5 = 3$, $x_2 - x_4 = 2$, also $x_2 = 2 - x_4$, dann $x_1 + 3x_4 = 1$, also $x_1 = 1 - 3x_4$. Also ist

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 - 3x_4 \\ 2 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ 3 \end{bmatrix} \middle| \ x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \ x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beide Schreibweisen sind in Ordnung.

d) [3 Punkte] Der Rang ist die Dimension des Bildes von A, und die Anzahl der Nichtnullzeilen in einer Zeilenstufenform von A, also ist $\mathrm{Rang}(A) = 2$.

Basis von $\mathrm{Bild}(A)$: Die NZSF hat Pivotelemente in den Spalten 1 und 2, daher bilden die 1. und 2. Spalte von A eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Bild}(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

□

2. Aufgabe (7 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

a) [2 Punkte] Sei $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -2 & 2 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $\det(A) = 3a^2 + 2a$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A nicht invertierbar?

A nicht invertierbar für a $\quad a = 0$ und $a = -\frac{2}{3}$

b) [2 Punkte] Sei $A \in \mathbb{R}^{7,7}$ mit charakteristischem Polynom $p_A(z) = -(z+2)^4(z-5)^3$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und ihre algebraischen Vielfachheiten.

Eigenwerte und algebraische Vielfachheiten:

$z_1 = -2$ mit alg. Vfh. $a(-2) = 4$ $\quad z_2 = 5$ mit alg. Vfh. $a(5) = 3$

c) [3 Punkte] Sei $A = SDS^{-1}$ mit $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Bestimmen Sie $\det(A)$ und den Eigenraum zum Eigenwert 2.

$\det(A) = \quad 0$

Eigenraum zum Eigenwert 2:

$$V_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Lösung. a) [2 Punkte] Die Matrix A ist nicht invertierbar, genau dann wenn $\det(A) = 0$, d.h. wenn $0 = \det(A) = 3a^2 + 2a = a(3a+2)$. Dies gilt für $a = 0$ und $a = -\frac{3}{2}$.

b) [2 Punkte] Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also $z_1 = -2$ und $z_2 = 5$. Die algebraische Vielfachheit ist die Vielfachheit der Nullstelle, also $a(-2) = 4$ und $a(5) = 3$.

c) [3 Punkte] $\det(A)$ ist das Produkt der Eigenwerte, also $\det(A) = 2 \cdot 2 \cdot 0 = 0$.

Alternativ: $\det(A) = \det(S)\det(D)\det(S^{-1}) = \det(S)\det(D)\det(S)^{-1} = \det(D) = 0$.

Alternativ: Da A den Eigenwert 0 hat ist A nicht invertierbar, also $\det(A) = 0$.

Da $A = SDS^{-1}$ eine Diagonalisierung von A ist, sind die ersten zwei Spalten von S Eigenvektoren von A zum Eigenwert 2. Da sie linear unabhängig sind (S ist invertierbar), erzeugen sie den Eigenraum:

$$V_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\square$

3. Aufgabe (8 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

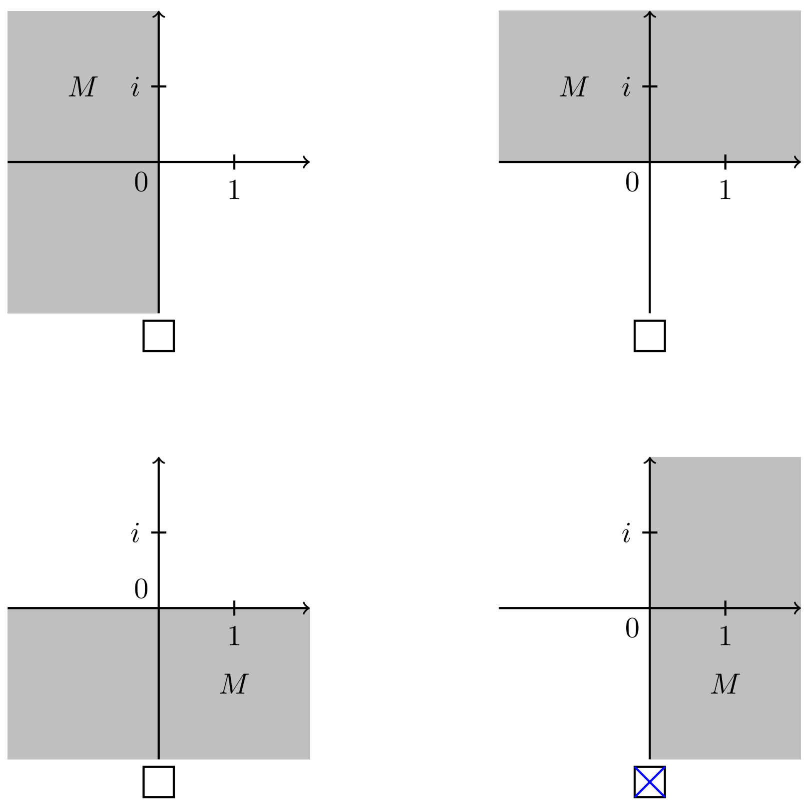
a) [3 Punkte] Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $z = \frac{1-i}{1+i}$, sowie $z \cdot \overline{z}$.

$\mathrm{Re}(z) =$ 0 $\qquad$ $\mathrm{Im}(z) =$ -1 $\qquad$ $z \cdot \overline{z} = 1$

b) [3 Punkte] Bestimmen Sie alle Lösungen von $z^3 = 27i$. Sie können die Lösungen in kartesischer Darstellung oder Eulerdarstellung angeben.

Lösungen: $3e^{i\frac{\pi}{6}},\ 3e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = 3e^{i\frac{5\pi}{6}},\ 3e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})} = 3e^{i\frac{9\pi}{6}} = -3i$

c) [2 Punkte] Welche der Skizzen beschreibt die Menge M aller $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(iz) \geq 0$? Kreuzen Sie die richtige Skizze an.



Lösung. a) [3 Punkte] Es ist

$$z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Daher sind $\mathrm{Re}(z) = 0$ und $\mathrm{Im}(z) = -1$. Weiter ist

$$z \cdot \overline{z} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1+i}{1-i} = 1.$$

Alternativ ist $z \cdot \overline{z} = -i \cdot i = 1$ oder $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$.

b) [3 Punkte] Lösung mit Euleransatz $z = re^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$r^3 e^{i3\varphi} = z^3 = 27i = 3^3 e^{i\frac{\pi}{2}},$$

also $r^3 = 3^3$, also $r = 3$, und $3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$, also $\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k$. Das ergibt die drei verschiedenen Lösungen

$$z_0 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_1 = 3e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad z_2 = 3e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})} = 3e^{i\frac{9\pi}{6}} = 3e^{i\frac{3\pi}{2}} = -3i.$$

und wir sind fertig. Die Lösungen z_0 und z_1 können auch in kartesischer Darstellung geschrieben werden:

$$z_0 = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right),$$
$$z_1 = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right).$$

c) [2 Punkte] Schreibe $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Im}(ix - y) = x$. Daher ist $\mathrm{Im}(iz) = x \geq 0$ die rechte Halbebene.

$\square$

Bitte bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben auf separaten Blättern.

4. Aufgabe (10 Punkte)

Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

Lösung. Es bezeichne a_j die j-te Spalte von A. Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren auf a_1, a_2, a_3 an:

$$\begin{aligned}
\|a_1\|_2 &= \sqrt{0^2+2^2+2^2} = 2\sqrt{2}, \\
u_1 &= \frac{1}{\|a_1\|_2} a_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
\hat{u}_2 &= a_2 - \underbrace{\langle a_2, u_1 \rangle}_{=\sqrt{2}} u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\|\hat{u}_2\|_2 &= 3, \\
u_2 &= \frac{1}{\|\hat{u}_2\|_2} \hat{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\hat{u}_3 &= a_3 - \underbrace{\langle a_3, u_1 \rangle}_{=0} u_1 - \underbrace{\langle a_3, u_2 \rangle}_{=-2} u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
\|\hat{u}_3\|_2 &= \sqrt{2}, \\
u_3 &= \frac{1}{\|\hat{u}_3\|_2} \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$Q = [u_1, u_2, u_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

und die obere Dreiecksmatrix R erhält man durch $R = Q^T A$, deshalb

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

oder direkt aus dem Gram-Schmidt-Verfahren:

$$R = \begin{bmatrix} \|a_1\|_2 & \langle a_2, u_1 \rangle & \langle a_3, u_1 \rangle \\ 0 & \|\hat{u}_2\|_2 & \langle a_3, u_2 \rangle \\ 0 & 0 & \|\hat{u}_3\|_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

□

5. Aufgabe (5 Punkte)

a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{n^2 + \sqrt{3}n}{n^3 + n^2 + 7}$.

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\ln(1 + \frac{1}{x})}$

Lösung. a) [2 Punkte] Es ist

$$a_n = \frac{n^2 + \sqrt{3}n}{n^3 + n^2 + 7} = \frac{\frac{1}{n} + \sqrt{3}\frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^3}} \to \frac{0}{1} = 0.$$

b) [3 Punkte] Es sind $\lim_{x\to\infty}(e^{\frac{2}{x}} - 1) = e^0 - 1 = 0$ und $\lim_{x\to\infty} \ln(1 + \frac{1}{x}) = \ln(1) = 0$. Daher kann die Regel von l'Hospital angewendet werden. Es ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\ln(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}}{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) 2e^{\frac{2}{x}} = (1 + 0)2e^0 = 2.$$

$\square$

6. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sin(\pi x) + \cos(\pi x) + x(x - 2)$, mindestens eine Nullstelle in $[0, 2]$ hat.

Lösung. Es sind

$$\begin{aligned} f(0) &= 2\sin(0) + \cos(0) + 0(0 - 2) = 1, \\ f(1) &= 2\sin(\pi) + \cos(\pi) + 1(1 - 2) = -2, \\ f(2) &= 2\sin(2\pi) + \cos(2\pi) + 2(2 - 2) = 1. \end{aligned}$$

Da f auf dem Intervall $[0, 1]$ stetig ist und $f(0) > 0 > f(1)$ ist, hat f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in $]0, 1[$.
Genauso sieht man, dass f auch eine Nullstelle in $[1, 2]$ hat. $\square$

7. Aufgabe (13 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\,dx$,

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-(2\sin(x))^2}\,dx$.

Lösung. a) [4 Punkte] Substituiere $t = \ln(x)$, dann ist $dt = \frac{1}{x}\,dx$ und

$$\int_1^{\exp(\frac{\pi}{2})} \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt = \sin(t)\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1.$$

Alternativ: Eine Stammfunktion von $\frac{\cos(\ln(x))}{x}$ ist $\sin(\ln(x))$, also ist

$$\int_1^{\exp(\frac{\pi}{2})} \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx = \sin(\ln(x))\Big|_1^{\exp(\frac{\pi}{2})} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1.$$

b) [5 Punkte] Wir berechnen zuerst eine PBZ des Integranden:

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

Mit der Zuhaltemethode sind $A = \frac{x-1}{x-3}\big|_{x=2} = \frac{1}{-1} = -1$ und $B = \frac{x-1}{x-2}\big|_{x=3} = \frac{2}{1} = 2$. Dann ist

$$\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{2}{x-3}\right) dx = -\ln|x-2| + 2\ln|x-3| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

c) [4 Punkte] Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-(2\sin(x))^2}\,dx &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin(x)^2}\,dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(x)^2}\,dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx\end{aligned}$$

da $\cos(x) \geq 0$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ ist. Also ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-(2\sin(x))^2}\,dx = 2\sin(x)\big|_0^{\pi/2} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\sin(0) = 2.$$

□

8. Aufgabe (14 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (-2-x)^{-1}$.

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \geq 0$ ist

$$f^{(n)}(x) = n!(-2-x)^{-n-1}.$$

b) Bestimmen Sie das n-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$.

c) Geben Sie das Restglied R_n zum n-ten Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ an. Zeigen Sie: Für $x \in [1,5]$ gilt $|R_n(x)| \leq \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$.

d) Für welche $x \in [1,5]$ konvergiert die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ gegen f?

Lösung. a) [5 Punkte]

IA Für $n = 0$: Es ist $f^{(0)}(x) = f(x) = (-2-x)^{-1} = 0!(-2-x)^{-0-1}$. Also stimmt die Behauptung für $n = 0$.

IV Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $f^{(n)}(x) = n!(-2-x)^{-n-1}$.

IS Für $n+1$: Es ist

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \overset{\text{IV}}{=} \frac{d}{dx} n!(-2-x)^{-n-1} \\ &= n!(-n-1)(-2-x)^{-n-2}(-1) = (n+1)!(-2-x)^{-(n+1)-1}. \end{aligned}$$

b) [2 Punkte] Das n-te Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ ist

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(3)}{k!}(x-3)^k = \sum_{k=0}^{n} (-5)^{-(k+1)}(x-3)^k.$$

c) [5 Punkte] Das Restglied ist (in Lagrange-Form)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-3)^{n+1} = \frac{1}{(-2-\xi)^{n+2}}(x-3)^{n+1},$$

wobei ξ zwischen $x_0 = 3$ und x liegt.

Abschätzung: Für $x \in [1,5]$ gilt $|x-3| \leq 2$. Da ξ zwischen $x_0 = 3$ und x liegt, ist insbesondere $\xi \geq 1$, also $|-2-\xi| \geq 3$. Daher ist

$$|R_n(x)| = \frac{1}{|-2-\xi|^{n+2}}|x-3|^{n+1} \leq \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}.$$

d) [2 Punkte] Für jedes $x \in [1,5]$ gilt $|R_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$, also konvergiert die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ gegen $f(x)$.

$\square$

9. Aufgabe (8 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch mit

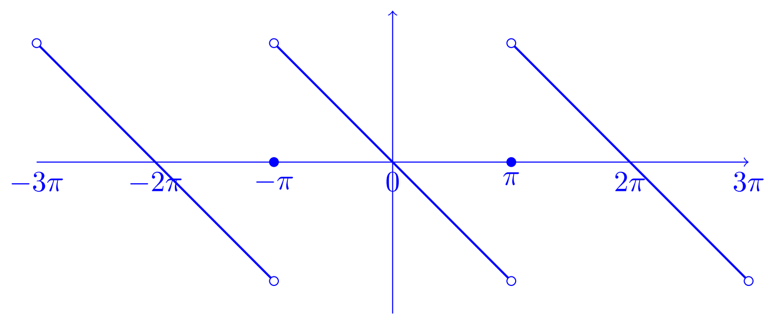
$$f(t) = \begin{cases} -t & \text{für } -\pi < t < \pi, \\ 0 & \text{für } t = \pi. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie f auf $]-3\pi, 3\pi[$. Entscheiden Sie anhand der Skizze, ob f ungerade oder gerade ist.

b) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von f.

c) Für welche $t \in\,]-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourierreihe, und ggf. gegen welchen Wert?

Lösung. a) [2 Punkte] Skizze:



Also ist f ungerade.

b) [4 Punkte] Es ist $T = 2\pi$, also $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

Da f ungerade ist, sind die Koeffizienten $a_k = 0$ für alle $k \geq 0$.

Berechnung der Fourierkoeffizienten: Für $k \geq 1$ ist

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t)\, dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-t) \sin(kt)\, dt.$$

Mit partieller Integration $u(t) = t$, $v'(t) = -\sin(kt)$, also $u'(t) = 1$ und $v(t) = \frac{\cos(kt)}{k}$, ist

$$b_k = \frac{1}{\pi} t \frac{\cos(kt)}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \frac{\cos(kt)}{k}\, dt}_{=0} = \frac{\cos(k\pi)}{k} + \frac{\cos(-k\pi)}{k} = \frac{2}{k}(-1)^k.$$

Fourierreihe von f:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k} \sin(kt).$$

c) [2 Punkte] Die Funktion f ist stückweise monoton, daher gilt:

- In den Stetigkeitspunkten t von f, also in $]-\pi, \pi[$, konvergiert die Fourierreihe gegen $f(t) = -t$.
- In π konvergiert die Fourierreihe gegen den Mittelwert von links- und rechtsseitigen Funktionswert, also gegen $\frac{f(t-)+f(t+)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0 = f(\pi)$.

□