2. Klausur
Elektrische Netzwerke
28. September 2007

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Bearbeitungszeit: 145 Minuten

- Trennen Sie den Aufgabensatz **nicht** auf.
- Benutzen Sie für die Lösung der Aufgaben **nur** das mit diesem Deckblatt ausgeteilte Papier. **Lösungen, die auf anderem Papier geschrieben werden, können nicht gewertet werden.** Weiteres Papier kann bei den Tutoren angefordert werden.
- **Notieren Sie bei der Aufgabe einen Hinweis, wenn die Lösung auf einem Extrablatt fortgesetzt wird**
- **Schreiben Sie deutlich!** Doppelte, unleserliche oder mehrdeutige Lösungen können nicht gewertet werden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift!
- Schreiben Sie nur in **blau** oder **schwarz**!

Bewertung

Aufgabe	Punkte	erreicht
1	20	
2	15	
3	15	
4	15	
5	15	
6	20	

1. Aufgabe (20 Punkte): Fragen aus verschiedenen Gebieten

1.1. Harmonische Größe (1 Punkt)

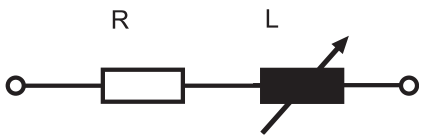
Was versteht man unter dem Begriff *harmonische Größe*?

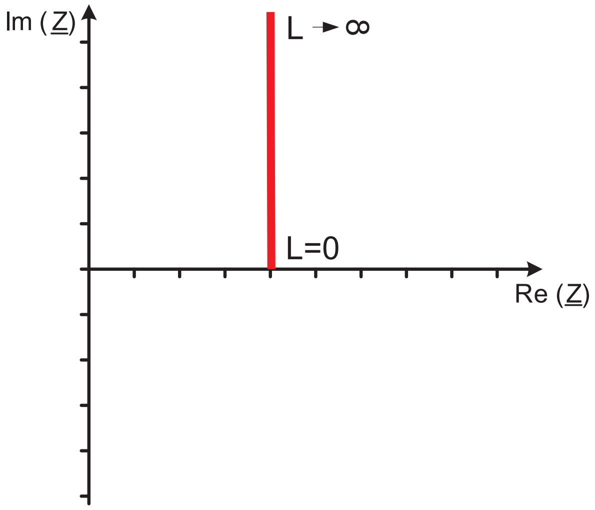
Lösung:

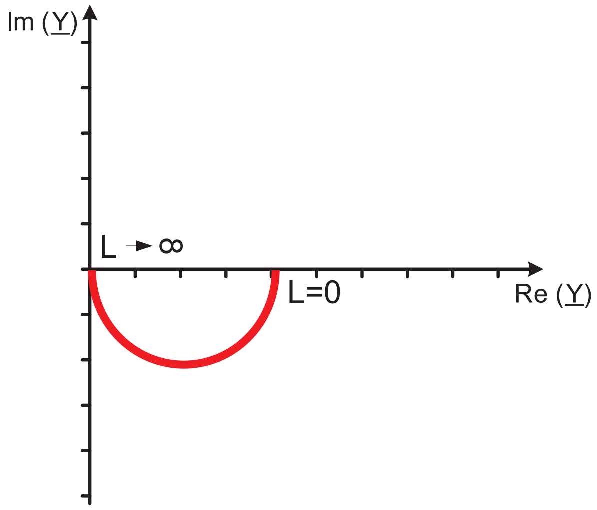
Eine Größe, deren Zeitverlauf durch die Sinus- bzw. Cosinus-Funktion zu beschreiben ist.

1.2. Ortskurve (2 Punkte)

Zeichnen Sie den Verlauf der Ortskurve für *Impedanz* und *Admittanz* der RL-Reihenschaltung in Abhängigkeit des Parameters L in die vorbereiteten Diagramme ein. Markieren Sie die Punkte $L = 0$ und $L \to \infty$ in beiden Ortskurven.







1.3. Ausgleichsvorgänge (1 Punkt)

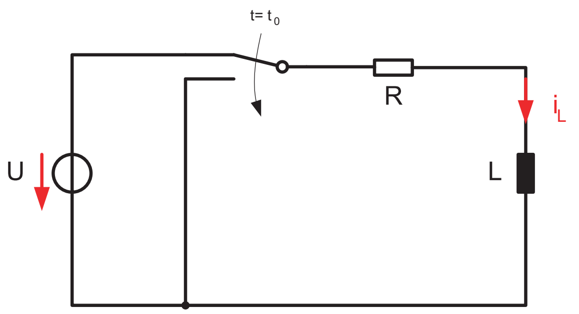
Was versteht man unter einem stationären Zustand?

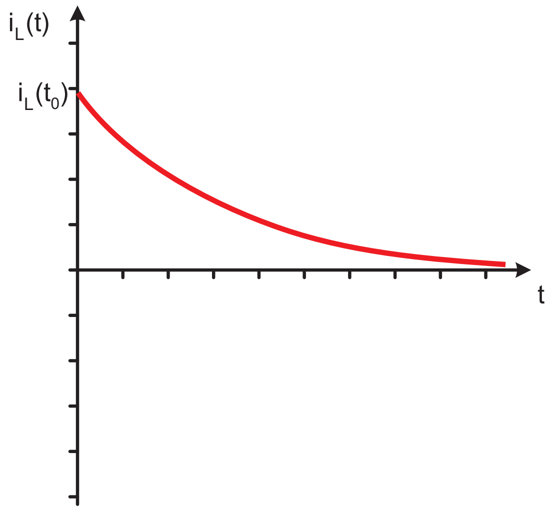
Lösung:

Einen stabilen Zustand, in dem sich keine Systemgröße (U, I) *mehr ändert.*

1.4. Ausschalten einer RL-Reihenschaltung (1 Punkt)

Skizzieren Sie den Verlauf des Stromes i_L durch die Spule, wenn der Schalter zum Zeitpunkt $t = t_0$ **umgeschaltet** wird ($U = 10\text{V}, L = 1\text{mH}, R = 100\Omega$).





1.5. Lösungsansatz für eine Differenzialgleichung erster Ordnung (1 Punkt)

Gegeben ist eine Differenzialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{d}{dt}x(t) + a \cdot x(t) + b = 0$$

Geben Sie den allgemeinen Lösungsansatz für eine solche Differenzialgleichung an.

Lösung:

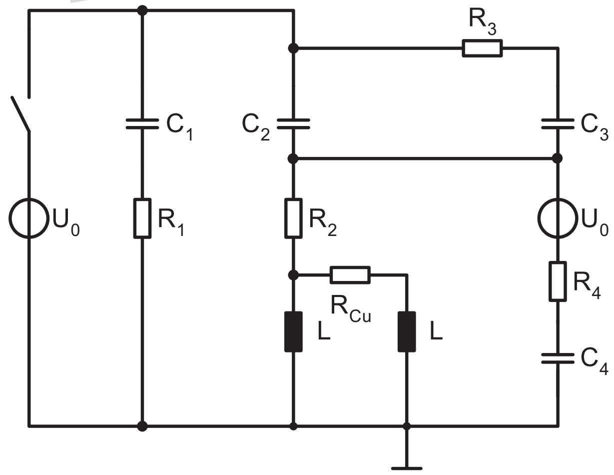
$$x(t) = k \cdot e^{p \cdot t}$$

oder auch mit konstantem Anteil

$$x(t) = k \cdot e^{p \cdot t} + k_0$$

1.6. Unabhängige Energiespeicher (1 Punkt)

Wieviele unabhängige Energiespeicher besitzt das folgende Netzwerk?



Lösung:

sechs!

1.7. Gesteuerte Quelle (2 Punkte)

Geben Sie die Schaltung einer *spannungsgesteuerten Spannungsquelle* an. Welche Dimension hat der Proportionalitätsfaktor einer *spannungsgesteuerten Spannungsquelle*

Lösung:

Man errechnet die Ausgangsspannung einer stromgesteuerten Spannungsquelle nach $U_{out} = K \cdot U_{in}$*, mit* $K = U_{out}/U_{in}$ *ist der Proportionalitätsfaktor eine Spannungsverstärkung und somit dimensionslos.*

1.8. Transimpedanz (1 Punkt)

Was versteht man unter dem Begriff einer Transimpedanz?

Lösung:

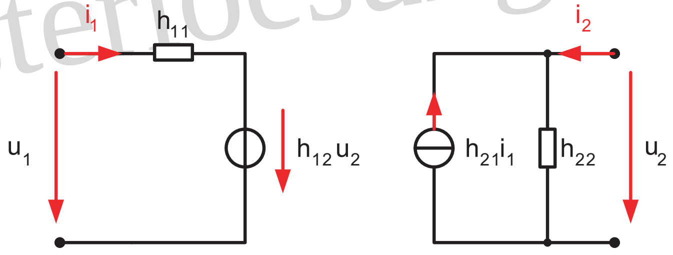
Proportionalitätsfaktor einer stromgesteuerten Spannungsquelle

1.9. H-Parameter Ersatzschaltbild (2 Punkte)

Zeichnen Sie die **Ersatzschaltung** zur Realisierung eines Zweitors, dessen H-Parameter gegeben sind mit

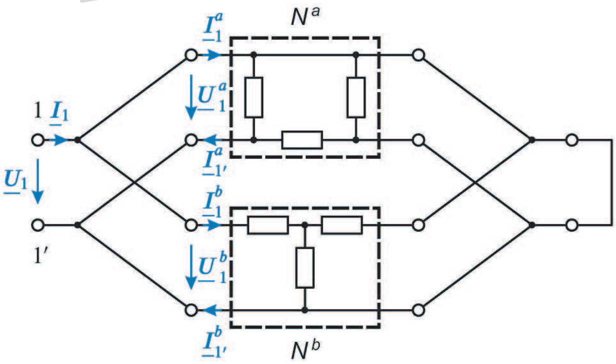
$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

Lösung:


i1
h11
i2
u1
h12u2
h21i1
h22
u2

1.10. Einhalten der Torbedingung (1 Punkt)

Ist bei der folgenden Schalten die Einhaltung der Torbedingung gewährleistet?

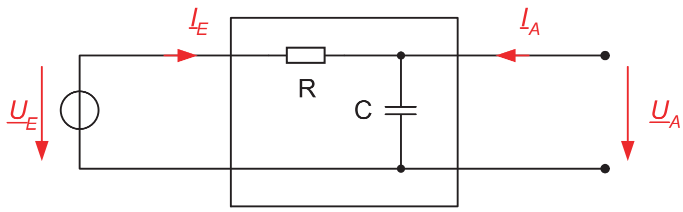


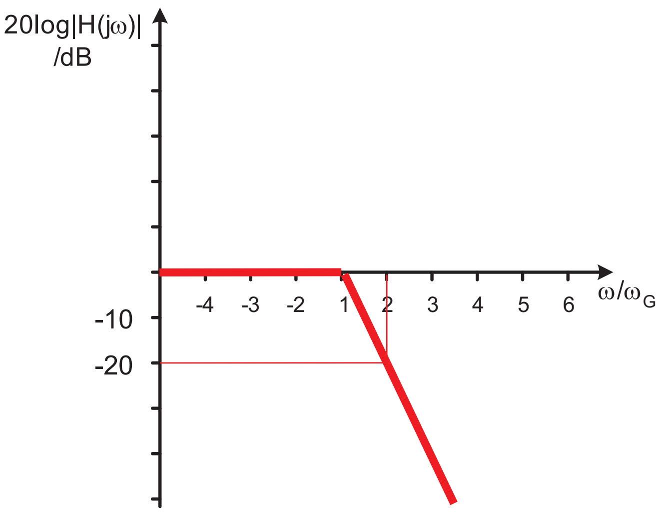
Lösung:

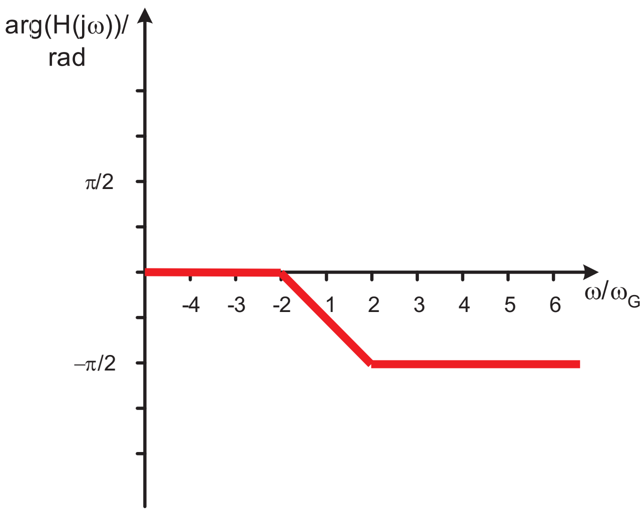
Nö

1.11. Bodediagramm (2 Punkte)

Skizzieren Sie die Bodediagramme für Amplituden- und Phasenfrequenzgang für die folgende RC-Schaltung





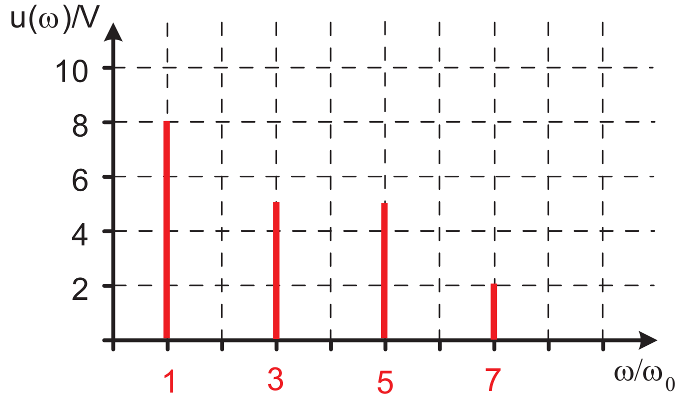


1.12. Harmonische Zerlegung (1 Punkt)

Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum der Spannung

$$u(t) = 8\mathrm{V}\sin(\omega_0 t) + 5\mathrm{V}\sin(3\omega_0 t) + 5\mathrm{V}\sin(5\omega_0 t) + 1\mathrm{V}\sin(7\omega_0 t)$$

mit $\omega_0 = 2\pi \cdot 50\mathrm{Hz}$



1.13. Orthogonalitätsrelation (1 Punkt)

Beschreiben Sie die Orthogonalitätsrelation stichpunktartig oder mit einer Formel.

Lösung:

Kern der Reihenentwicklungen ist die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^T g_1(t) \cdot g_2(t) = \begin{cases} = 0 & mit \quad g_1 \neq g_2 \\ > 0 & mit \quad g_1 = g_2 \end{cases} \tag{1}$$

- *Sind zwei Funktionen verschieden, so ist das Integral über eine Periode Null*
- *Sind die zwei Funktionen gleich, so liegt das Quadrat einer Funktion vor, das Integral über eine Periode verschwindet nicht*

1.14. Zusammenhang von Fourier- und Laplace-Transformation (2 Punkte)

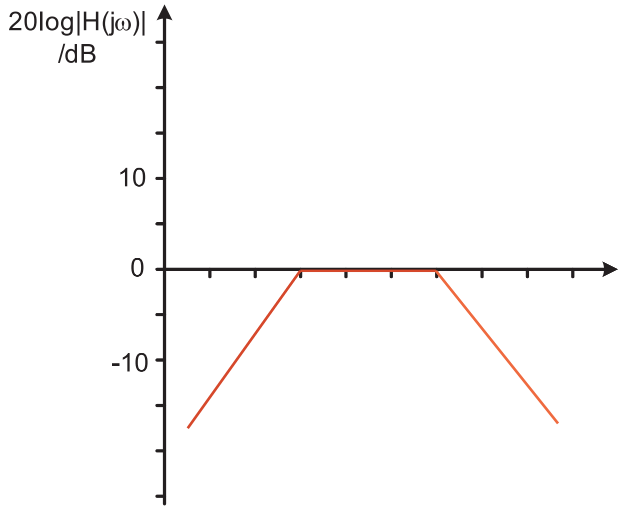
Erläutern Sie stichpunktartig den Zusammenhang von Fourier- und Laplace-Transformation

Lösung:

- *die Fouriertransformation ist Teil der Laplacetransformation für Signale, die absolut integrierbar sind, also im Unendlichen abklingen.*
- *die Laplacetransformation führt eine künstliche Bedämpfung periodischer Signale ein und stellt absolute Integrierbarkeit sicher.*
- *Die Laplacetransformierte existiert in der gesamten komplexen Ebene, sowie die Integrale existieren; die Fouriertransformierte existiert auf der imaginären Achse*

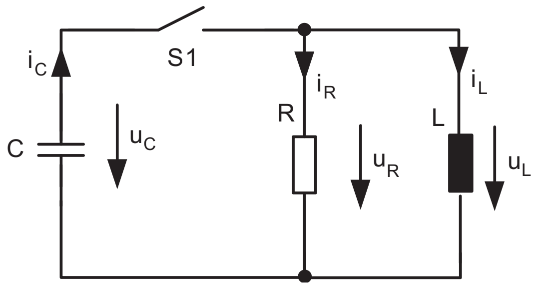
1.15. Bandpassfilter (1 Punkt)

Skizzieren Sie den Amplitudenfrequenzgang eines Bandpasses.



2. Aufgabe (15 Punkte): Ausgleichsvorgänge: Einschalten

In der nebenstehenden Schaltung ist der Kondensator C auf eine Spannung von $U_{DC} = 7{,}5\,kV$ aufgeladen. Der Schalter $S1$ wird zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen. Für die Bauteile gelten die folgenden Werte:



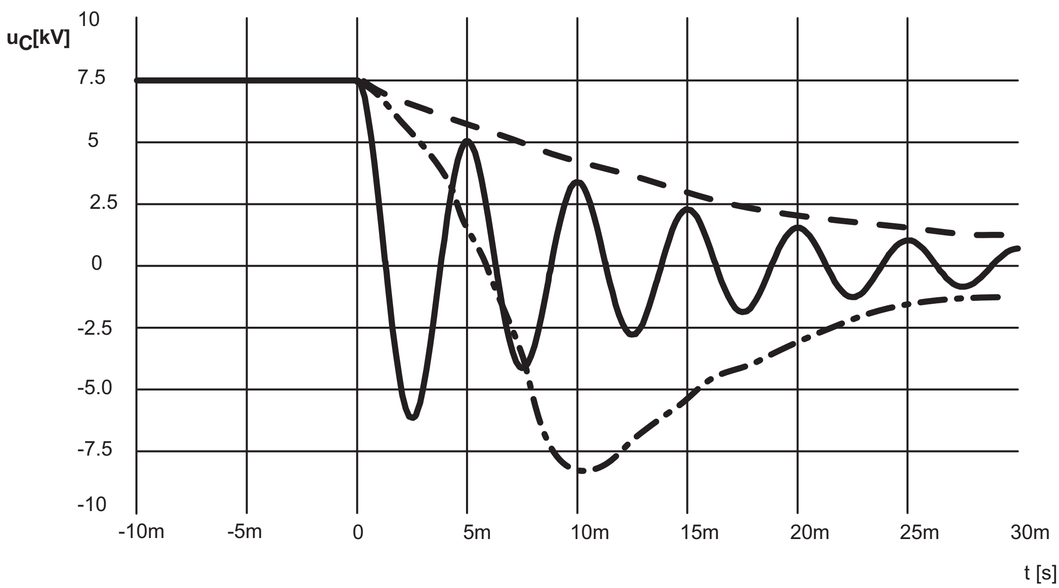
R $= 27\,\Omega$

C $= 1000\,\mu F$

L $= 1000\,\mu H$

2.1. Zeichnen des Verlaufes der Kondensatorspannung (3 Punkte)

Zeichnen Sie **qualitativ** die möglichen Verläufe der Spannung u_C Diagramm ein.
Hinweis Denken Sie an alle möglichen Verläufe, Sie haben noch nicht gerechnet!



2.2. Differenzialgleichung (4 Punkte)

Stellen Sie die Differenzialgleichung für die Spannung u_C über dem Kondensator C auf. Schreiben Sie die Differenzialgleichung in der Form

$$\frac{d^2}{dt^2} u_C + 2 \cdot \delta \frac{d}{dt} u_C + \omega_o^2 u_C = 0 \qquad (2)$$

her. **Geben Sie hierbei die Terme für δ und ω_0 an!**

Lösung:

Die Knotenregel liefert die Gleichung

$$i_L + i_R - i_C + 0 \qquad (1 \text{ Punkt}) \qquad (3)$$

Mit den Beziehungen für Strom und Spannung an den Elementen R, L und C

$$i_R = \frac{1}{R} u_C$$
$$i_L = \frac{1}{L}\int u_C\,dt$$
$$i_C = -C\frac{d}{dt}u_C \qquad \text{(1 Punkt)} \tag{4}$$

erhält man die DGL zu

$$C\frac{d}{dt}u_C + \frac{1}{R}u_C + \frac{1}{L}\int u_C\,dt = 0$$
$$\frac{d^2}{dt^2}u_C + \frac{1}{RC}\frac{d}{dt}u_C + \frac{1}{LC}u_C = 0$$
$$\frac{d^2}{dt^2}u_C + 2\delta\frac{d}{dt}u_C + \omega_0^2 u_C = 0 \qquad \text{(1 Punkt)} \tag{5}$$

mit

$$\delta = \frac{1}{2RC} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{(1 Punkt)} \tag{6}$$

2.3. Randbedingungen (2 Punkte)

Welche Randbedingungen gelten für die Spannung u_C bei $t = 0$ und für $t \to \infty$?

Lösung:

$$u_C(t=0) = U_{DC} = 7{,}5\ kV \tag{7}$$
$$u_C(t\to\infty) = 0 \qquad \text{(1 Punkt)} \tag{8}$$

2.4. Lösung (3 Punkte)

Mit $\delta < \omega_0$ liegt hier der Fall des **gedämpften, periodischen Einschwingens** vor. Geben Sie die Lösung für die Spannung u_C an.

Hinweis: Vereinfachen Sie für diesen Fall die Kreisfrequenz des periodischen Anteils mit

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Lösung:

Der Ansatz für die Spannung u_C ist

$$u_C = K\cdot e^{-\delta t}\cdot\cos(\omega t) \qquad \text{(1 Punkt)} \tag{9}$$

Ein Sinus-Term ist wegen der Randbedingung $u_C(0) = 0$ nicht sinnvoll, man bestimmt K aus den Randbedingungen zur Zeit $t = t_0$:

$$u_C(0) = U_{DC} = K\cdot e^{-\delta\cdot 0}\cos(\omega\cdot 0) \tag{10}$$

und erhält

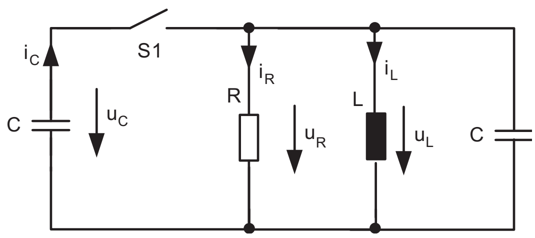
$$K = U_{DC} \qquad (1 \text{ Punkt}) \tag{11}$$

Der Spannung wird also beschrieben mit

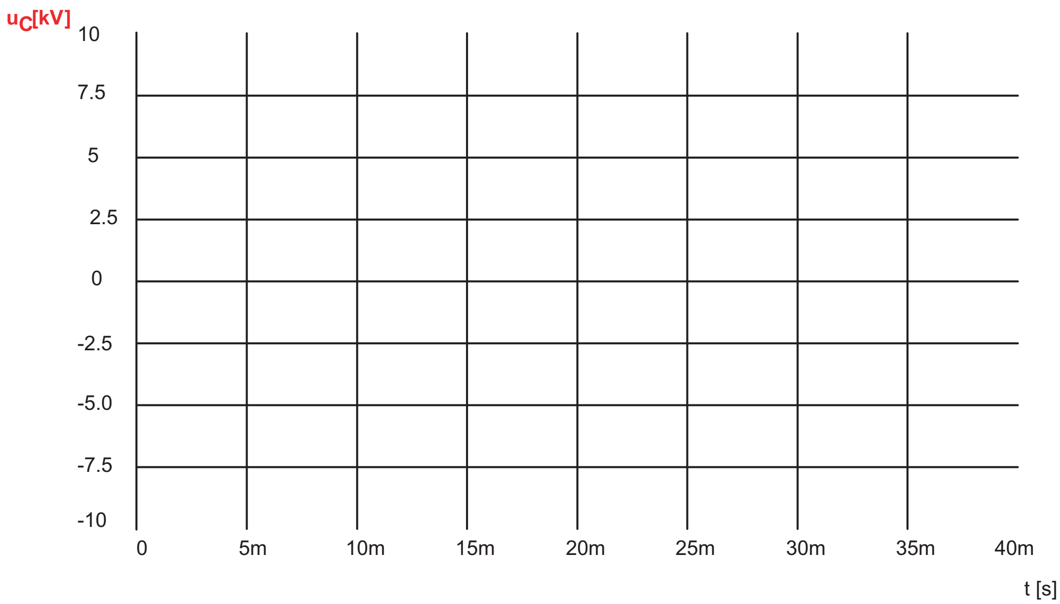
$$u_C = U_{DC}\, e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t) \qquad (1 \text{ Punkt}) \tag{12}$$

2.5. Erweiterung der Schaltung (3 Punkte)

Die Schaltung wird um einen weiteren Kondensator $C = 1000\,\mu F$ erweitert. Dieser ist zur Zeit $t = 0$ entladen.



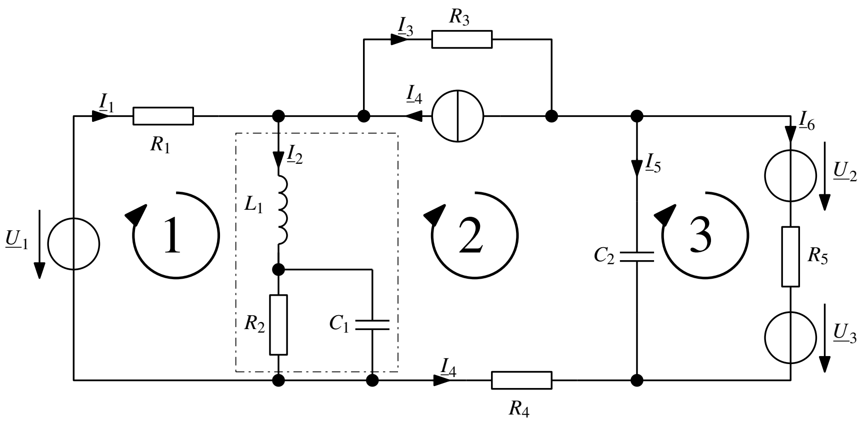
Zeichnen Sie **qualitativ** die möglichen Verläufe der Spannung u_C



Lösung:

Verlauf im Prinzip wie in Aufgabe 2.1. Beginnt bei 7.5kV und Frequenz der Schwingungen wäre höher, da die Energie zusätzlich zwischen den C hin- und her schwingt.

3. Aufgabe (15 Punkte): Ortskurve und Maschenstromverfahren

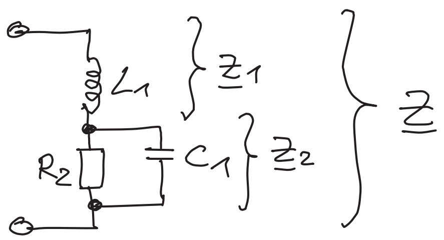


3.1. Ortskurve (3 Punkte)

Skizzieren Sie die Ortskurve der Impedanz $\underline{Z}(\omega)$ für das Teilnetzwerk bestehend aus L_1, C_1 und R_2 (gestrichelter Kasten) im unten stehende Diagramm. Tragen Sie hierfür die Teilortskurven auf und konstruieren Sie daraus den Gesamtverlauf.

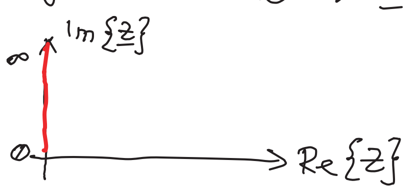
Lösung:

Ortskurve vom Teilnetzwerk:



$\underline{Z}_1 = j\omega L_1 \Rightarrow$ $\omega = 0 \rightarrow \underline{Z}_1 = 0$; $\omega \rightarrow \infty \rightarrow \underline{Z}_1 = \infty$

$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$

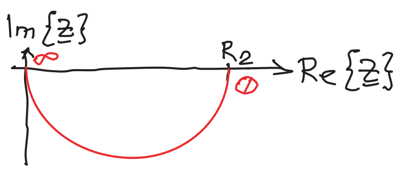


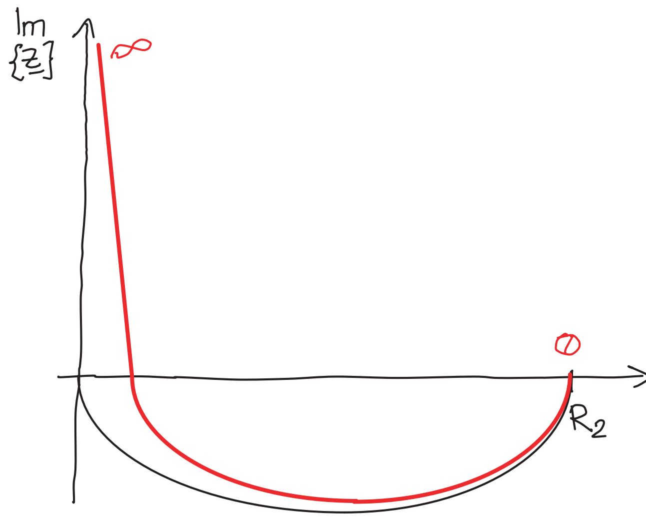
$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_1} \Rightarrow$$

$\omega = 0 \rightarrow \underline{Z}_2 = R$

$\omega \rightarrow \infty \rightarrow \underline{Z}_2 = 0$

$\omega = \text{bel.} \rightarrow \underline{Z}_2 = -jX$

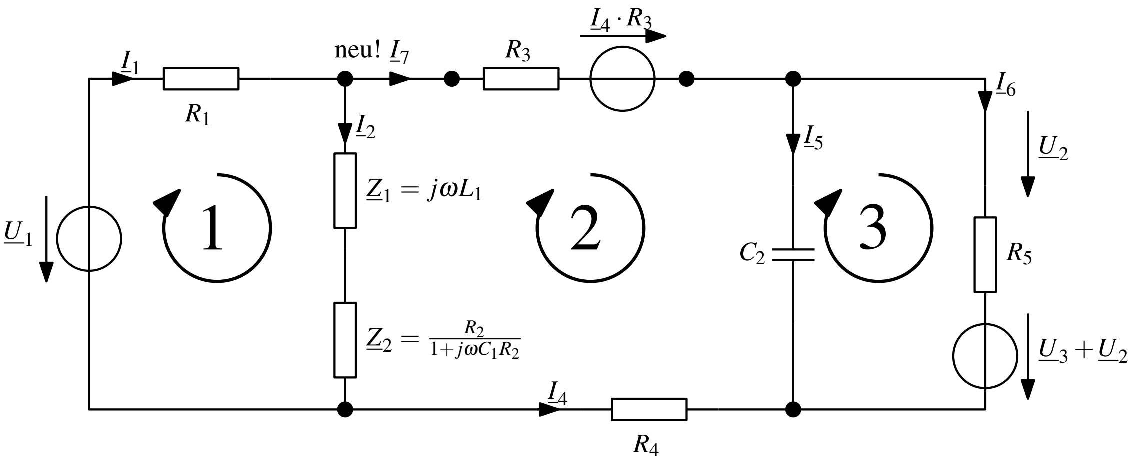




3.2. Vorbereitung der Schaltung (2 Punkte)

Bereiten Sie durch Vereinfachungen die oben gezeigte Schaltung für eine Maschenstromanalyse vor. Beachten Sie dabei die Quellen und nummerieren Sie die Maschen.

Lösung:



3.3. Maschengleichungen (3 Punkte)

Stellen Sie für die Maschen 1…3 die zugehörigen Maschengleichungen auf. Sortieren Sie diese so um, dass sich daraus die Elemente der Impedanzmatrix direkt ablesen lassen.

Lösung:

Masche 1:

$$R_1 \cdot \underline{I}_{M1} + \underline{Z}_1 \cdot (\underline{I}_{M1} - \underline{I}_{M2}) + \underline{Z}_2 (\underline{I}_{M1} - \underline{I}_{M2}) = \underline{U}_1$$

$$\underline{I}_{M1} \cdot (R_1 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + \underline{I}_{M2} \cdot (-\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2) = \underline{U}_1$$

Masche 2:

$$R_3 \cdot \underline{I}_{M2} + \underline{Z}_{C2} \cdot (\underline{I}_{M2} - \underline{I}_{M3}) + R_4 \cdot \underline{I}_{M2} + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1)(\underline{I}_{M2} - \underline{I}_{M1}) = -\underline{U}_4$$

$$\underline{I}_{M1} \cdot (-\underline{Z}_1 - \underline{Z}_1) + \underline{I}_{M2} \cdot (R_3 + \underline{Z}_{C2} + \underline{R}_4 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1) + \underline{I}_{M3} (-\underline{Z}_{C2}) = -\underline{U}_4$$

Masche 3:

$$\underline{Z}_{C2} \cdot (\underline{I}_{M3} - \underline{I}_{M2}) + R_5 \cdot \underline{I}_{M3} = -(\underline{U}_2 + \underline{U}_3)$$

$$\underline{I}_{M2} \cdot (-\underline{Z}_{C2}) + \underline{I}_{M3} \cdot (\underline{Z}_{C2} + R_5) = -(\underline{U}_2 + \underline{U}_3)$$

3.4. Impedanzmatrix (2 Punkte)

Erstellen Sie aus den Maschengleichungen in Aufgabe 3.3 die Impedanzmatrix $\underline{\mathbf{Z}}$ des Netzwerkes.

Lösung:

Impedanzmatrix:

$$\underline{\underline{Z}} = \begin{pmatrix} R_1 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & -\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 & \emptyset \\ -\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 & R_3 + \underline{Z}_{C2} + R_4 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & -\underline{Z}_{C2} \\ \emptyset & -\underline{Z}_{C2} & \underline{Z}_{C2} + R_5 \end{pmatrix}$$

mit $\underline{Z}_{C2} = \frac{1}{j\omega C_2}$; $\underline{Z}_1 = j\omega L_1$

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2}{1 + j\omega C_1 R_2}$$

3.5. Quellenvektor (1 Punkt)

Erstellen Sie aus den Maschengleichungen in Aufgabe 3.3 den Quellenvektor $\underline{\mathbf{U}}_q$ des Netzwerkes.

Lösung:

Quellenvektor:

$$\underline{U}_q = \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{U}_4 \\ -(\underline{U}_2 + \underline{U}_3) \end{pmatrix} \text{ mit } \underline{U}_4 = \underline{I}_4 \cdot R_3$$

3.6. Inzidenzmatrix (4 Punkte)

Stellen Sie die Inzidenzmatrix $\underline{\mathbf{A}}$ sowie den dazu gehörigen Vektor der Einzelströme $\underline{\mathbf{I}}$ auf und geben Sie die Berechnungsformel für den Strom $\underline{I}_3$ an.

Lösung:

Inzidenzmatrix:

$\underline{I}_1 = \underline{I}_{M1}$

$\underline{I}_2 = \underline{I}_{M1} - \underline{I}_{M2}$

$\underline{I}_3$ = muss seperat berechnet werden!

$\underline{I}_4 = -\underline{I}_{M2}$

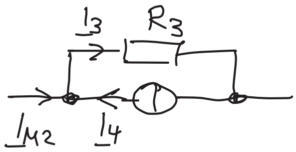
$\underline{I}_5 = \underline{I}_{M2} - \underline{I}_{M3}$

$\underline{I}_6 = \underline{I}_{M3}$

$\Rightarrow$ Vektor der Einzelströme $\underline{I} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \\ \underline{I}_6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Inzidenzmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

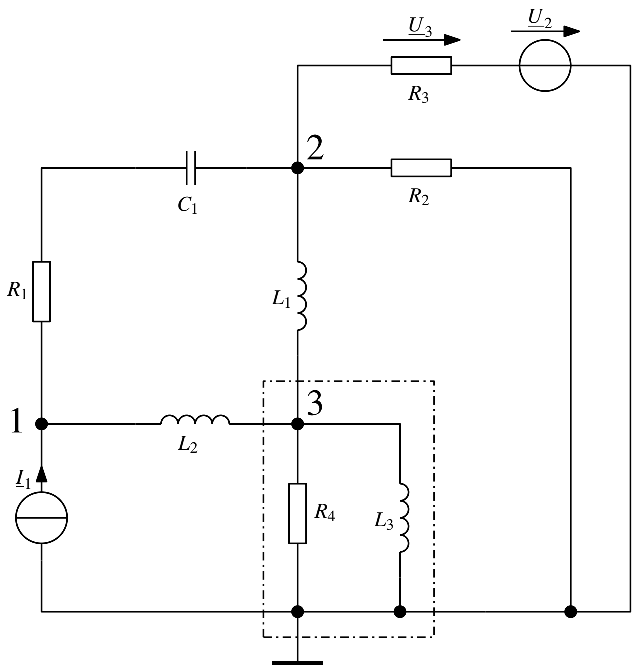
$\underline{I}_3$:



$\hookrightarrow \underline{I}_{M2} + \underline{I}_4 = \underline{I}_3$

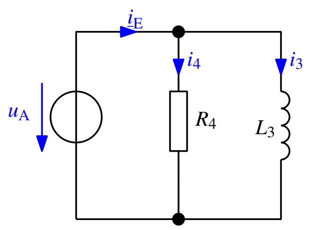
$\Rightarrow \boxed{\underline{I}_3 = \underline{I}_{M2} + \underline{I}_4}$

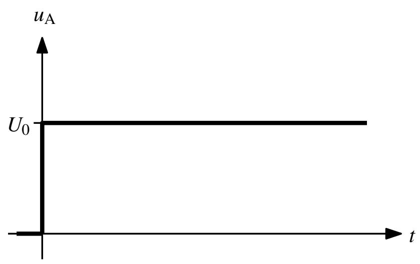
4. Aufgabe (15 Punkte): Knotenpotentialverfahren mit Zweitor



4.1. Sprungantwort (5 Punkte)

An das Teilnetzwerk bestehend aus R_4 und L_3 wird die Spannung u_A angelegt. Diese springt bei $t = 0$ auf den Wert U_0.





(a) Berechnen Sie für $t \geq 0$ den Strom i_4 im Zeitbereich

Lösung:

$U_0 = R_4 \cdot i_4 \Rightarrow i_4 = \frac{U_0}{R_4}$

(b) Berechnen Sie für $t \geq 0$ den Strom $I_4(s)$ im Laplace-Bildbereich

Lösung:

$I_4(s) = \frac{U_0}{R_4} \cdot \frac{1}{s}$

(c) Berechnen Sie für $t \geq 0$ den Strom $I_3(s)$ im Laplace-Bildbereich

Lösung:

$$U_0 = L_3 \cdot \frac{di_3}{dt}$$

$$\mathscr{L}\{U_0\} = \frac{U_0}{s} = L_3 \cdot \left(s \cdot I_3 - \underbrace{i_3(0)}_{=0}\right) = L_3 \cdot s \cdot I_3$$

$$I_3(s) = \frac{U_0}{L_3} \cdot \frac{1}{s^2}$$

(d) Berechnen Sie für $t \geq 0$ den Strom i_3 im Zeitbereich. Es gilt $\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$.

Lösung:

$$i_3 = \mathscr{L}^{-1}\{I_3(s)\} = \frac{U_0}{L_3} \cdot t$$

(e) Berechnen Sie für $t \geq 0$ den Strom i_E im Zeitbereich.

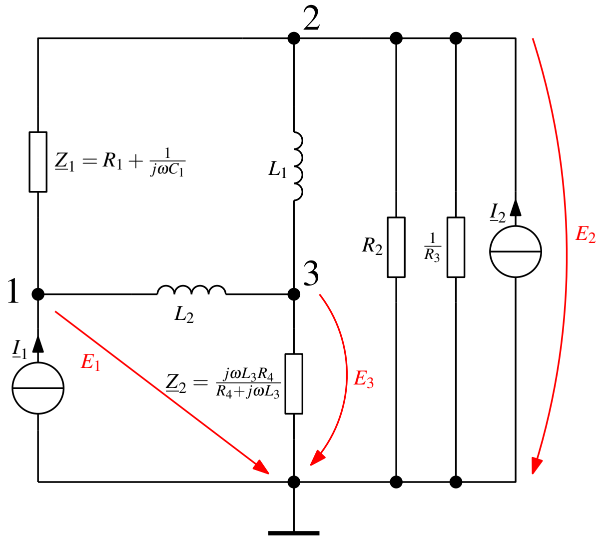
Lösung:

$$i_E = i_4 + i_3 = \frac{U_0}{R_4} + \frac{U_0}{L_3} \cdot t$$

4.2. Vorbereitung der Schaltung (2 Punkte)

Bereiten Sie durch Vereinfachungen die oben gezeigte Gesamtschaltung für eine Knotenpotentialanalyse vor. Beachten Sie dabei die Quellen und nummerieren Sie die Knoten. Zeichnen Sie anschließend die Potentialpfeile ein.

Lösung:



4.3. Knotengleichungen (3 Punkte)

Stellen Sie für die Knoten 1...3 die zugehörigen Knotengleichungen auf. Sortieren Sie diese so um, dass sich daraus die Elemente der Admittanzmatrix direkt ablesen lassen.

Lösung:

Knoten 1:

$$\frac{1}{\underline{Z}_1}\cdot(\underline{E}_1-\underline{E}_2)+\frac{1}{j\omega L_2}(\underline{E}_1-\underline{E}_3)=\underline{I}_1$$

$$\underline{E}_1\cdot\left(\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{j\omega L_2}\right)+\underline{E}_2\cdot\left(-\frac{1}{\underline{Z}_1}\right)+\underline{E}_3\cdot\left(-\frac{1}{j\omega L_2}\right)=\underline{I}_1$$

Knoten 2:

$$\frac{1}{\underline{Z}_1}\cdot(\underline{E}_2-\underline{E}_1)+\frac{1}{j\omega L_1}\cdot(\underline{E}_2-\underline{E}_3)+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\cdot\underline{E}_2=\underline{I}_2$$

$$\underline{E}_1\cdot\left(-\frac{1}{\underline{Z}_1}\right)+\underline{E}_2\cdot\left(\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{j\omega L_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)+\underline{E}_3\cdot\left(-\frac{1}{j\omega L_1}\right)=\underline{I}_2$$

Knoten 3:

$$\frac{1}{\underline{Z}_2}\cdot\underline{E}_3+\frac{1}{j\omega L_2}\cdot(\underline{E}_3-\underline{E}_1)+\frac{1}{j\omega L_1}\cdot(\underline{E}_3-\underline{E}_2)=0$$

$$\underline{E}_1\cdot\left(-\frac{1}{j\omega L_2}\right)+\underline{E}_2\cdot\left(-\frac{1}{j\omega L_1}\right)+\underline{E}_3\cdot\left(\frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{j\omega L_2}+\frac{1}{j\omega L_1}\right)=0$$

4.4. Admittanzmatrix (2 Punkte)

Erstellen Sie aus den Knotengleichungen in Aufgabe 4.3 die Admittanzmatrix $\underline{\mathbf{Y}}$ des Netzwerkes.

Lösung:

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{j\omega L_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_1} & -\frac{1}{j\omega L_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_1} & \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{j\omega L_1} \\ -\frac{1}{j\omega L_2} & -\frac{1}{j\omega L_1} & \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_2} \end{pmatrix}$$

mit $\underline{Z}_1 = \underline{R}_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$

$$\underline{Z}_2 = \frac{j\omega L_3 R_4}{R_4 + j\omega L_3}$$

4.5. Quellenvektor (1 Punkt)

Erstellen Sie aus den Knotengleichungen in Aufgabe 4.3 den Quellenvektor $\underline{\mathbf{I}}_q$ des Netzwerkes.

Lösung:

$$\underline{I}_q = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{R_3}$$

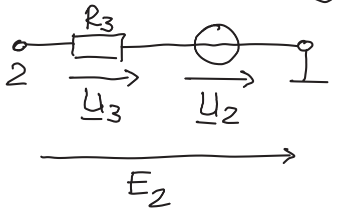
4.6. Spannung $\underline{U}_3$ (2 Punkte)

Berechnen Sie die Formel für die Spannung $\underline{U}_3$.

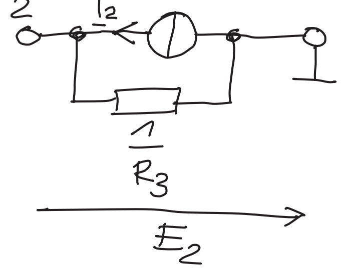
Lösung:

$\underline{U}_3$:

vor Umwandlung



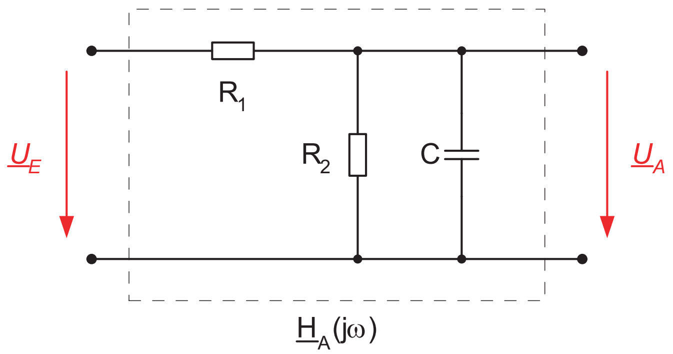
nach Umwandlung



$\Rightarrow \quad E_2 = \underline{U}_3 + \underline{U}_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_3 = E_2 - \underline{U}_2$

5. Aufgabe (15 Punkte): Frequenzverhalten von Vierpolen

Gegeben ist die Schaltung eines Zweitors. Es gelten $R_1 = R_2 = 2\text{k}\Omega$, $C = 1\mu\text{F}$.



5.1. Übertragungsfunktion (5 Punkte)

Bestimmen Sie die komplexe Übertragungsfunktion $\underline{H}_A(j\omega)$ des Zweitors.

Hinweis: Stellen Sie die Übertragungsfunktion als Produkt von Teilfunktionen dar, die Sie im Bodediagramm darstellen können.

Lösung:

$$\underline{H}_A(j\omega) = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{R_2 \parallel \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + (R_2 \parallel \frac{1}{j\omega C})} \tag{13}$$

$$= \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2}+j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2}+j\omega C}} \tag{14}$$

Als Zwischenrechnung wird der Term auf dem Bruchstrich vereinfacht zu

$$\frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C} = \frac{1}{\frac{1+j\omega R_2 C}{R_2}} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C} \tag{15}$$

Damit bekommt (14) die Form

$$\underline{H}_A(j\omega) = \frac{\frac{R_2}{1+j\omega R_2 C}}{R_1 + \frac{R_2}{1+j\omega R_2 C}} = \frac{\frac{R_2}{1+j\omega R_2 C}}{\frac{R_1+j\omega R_1 R_2 C + R_2}{1+j\omega R_2 C}} \tag{16}$$

$$= \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C} \cdot \frac{1 + j\omega R_2 C}{R_1 + j\omega R_1 R_2 C + R_2}$$

$$= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} C} \tag{17}$$

$$= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega\tau} \tag{18}$$

mit der Zeitkonstanten

$$\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \tag{19}$$

5.2. Konstanter Anteil und Grenzfrequenz (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Werte für die Verstärkung $\underline{H}_A(0)$ bei der Frequenz $\omega = 0$ und die Grenzfrequenz ω_G.

Lösung:

Konstanter Teil:

$$H_A(0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,5 \tag{20}$$

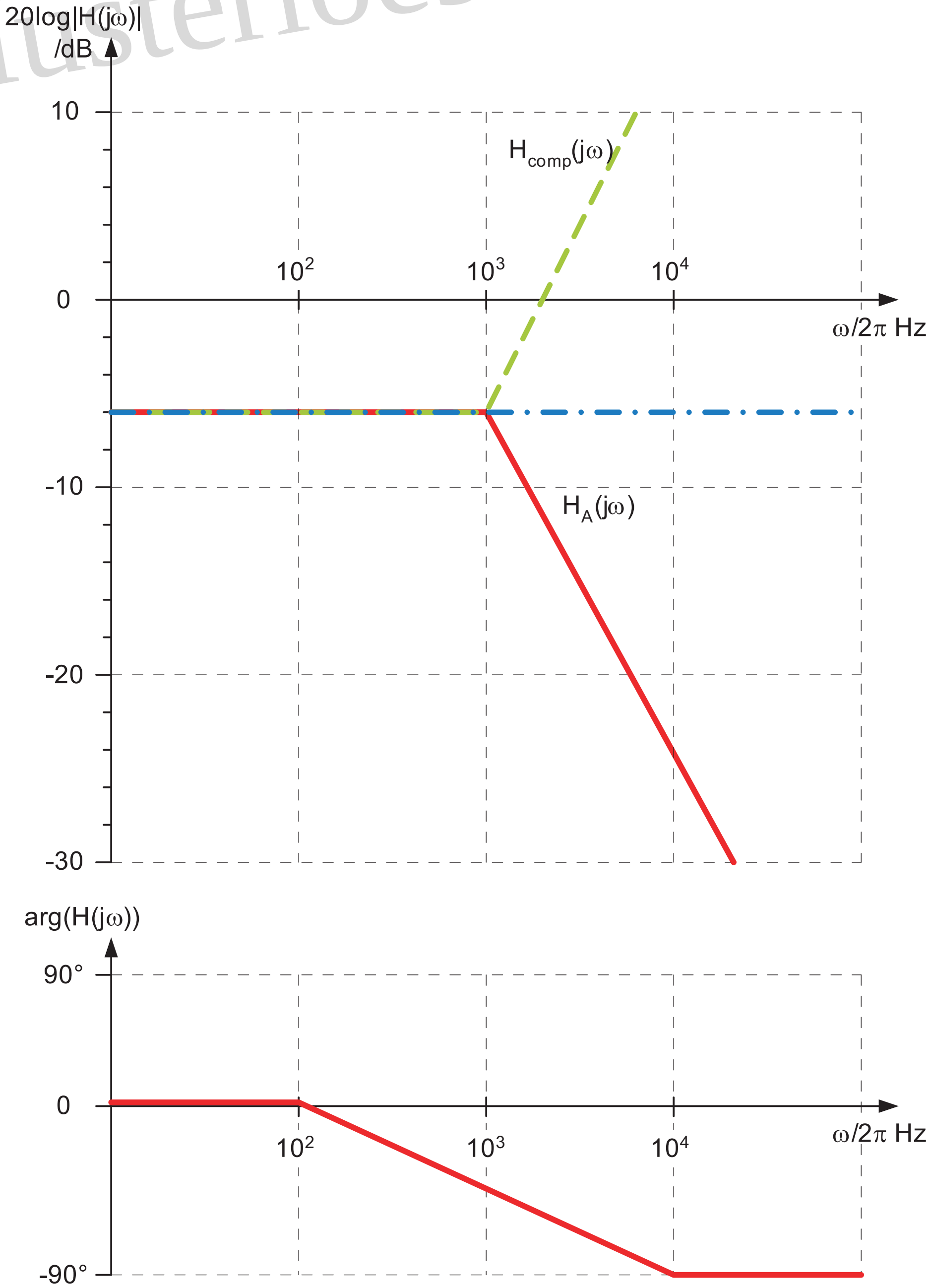
$$H_A(0) = 20\log 0,5 = -6,02dB \tag{21}$$

Grenzfrequenz:

$$\omega_G = \frac{1}{\tau} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} = \frac{2k\Omega + 2k\Omega}{2k\Omega \cdot 2k\Omega \cdot 1\mu F} = 1 \cdot 10^3 \frac{1}{s} \tag{22}$$

5.3. Bodediagramm (4 Punkte)

Stellen Sie die Bodediagramme des Amplituden- und Phasenfrequenzganges der in Aufgabe 5.1 berechnteten komplexen Übertragungsfunktion $\underline{H}_A(j\omega)$ dar.

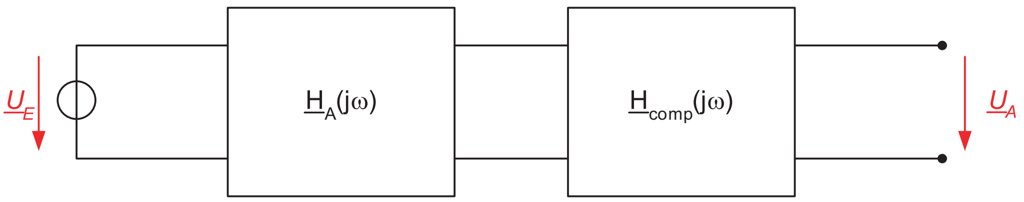

20log|H(jω)|
/dB
10
0
-10
-20
-30
10^2
10^3
10^4
ω/2π Hz
$H_{comp}(j\omega)$
$H_A(j\omega)$
arg(H(jω))
90°
0
-90°
10^2
10^3
10^4
ω/2π Hz

5.4. Kompensation (2 Punkte)

Welche Übertragungsfunktion $\underline{H}_{\text{comp}}(j\omega)$ muss ein nachgeschaltetes Netzwerk haben, damit sich für das gesamte System ein konstanter Amplitudenfrequenzgang ergibt?

Geben Sie die Übertragungsfunktion des nachgeschalteten Netzwerkes an. Welche Grenzfrequenz $\omega_{G,\text{comp}}$ muss das kompensierende Netzwerk haben?

Tragen Sie den Amplitudenfrequenzgang von$\underline{H}_{\text{comp}}(j\omega)$ ebenfalls in das Bodediagramm aus Aufgabe 5.3 ein.



Lösung:

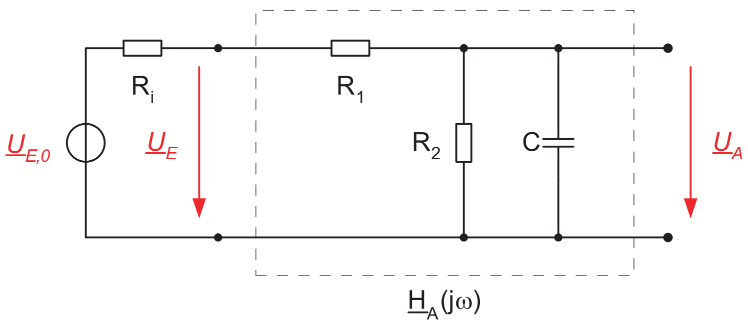
Die Übertragungsfunktion ist

$$\underline{H}_{\text{comp}}(j\omega) = 2 \cdot (1 + j\omega\tau) \tag{23}$$

Wobei die Zeitkonstante τ die selbe wie in Aufgabe 5.1 ist

5.5. Betrieb mit einer Spannungsquelle mit Innenwiderstand (2 Punkte)

Die Schaltung wird mit einer Signalquelle betrieben, die einen Innenwiderstand von $R_i = 1\text{k}\Omega$ hat.



Bestimmen Sie die veränderte Verstärkung $H_B(0)$ bei der Frequenz $\omega = 0$ in dB und sowie die Grenzfrequenz $\omega_{G,B}$ für diesen Fall.

Lösung:

Der konstante Teil ist

$$H_B(0) = \frac{R_2}{R_i + R_1 + R_2} = 0,4 \tag{24}$$

$$H_B(0) = 20 \log 0,5 = -7,95 d\text{B} \tag{25}$$

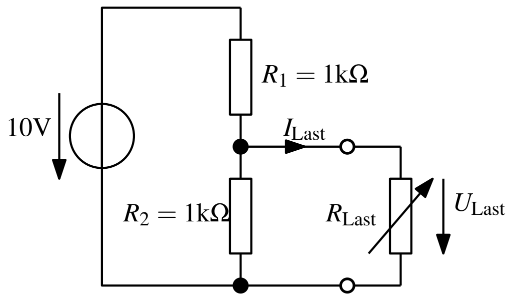
Grenzfrequenz:

$$\omega_{G,B} = \frac{1}{\tau} = \frac{R_1 + R_2 + R_1}{R_i R_1 R_2 C} = \frac{1k\Omega + 2k\Omega + 2k\Omega}{3k\Omega \cdot 2k\Omega \cdot 1\mu F} = 0,833 \cdot 10^3 \frac{1}{s} \tag{26}$$

6. Aufgabe (20 Punkte): Fragen zum Praktikum

Beantworten Sie die folgenden Fragen.

6.1. Belasteter Spannungsteiler (3 Punkte)



(a) Wie groß ist der Laststrom I_{Last} für $R_{Last} = 0$?

Lösung:
$I_{Last}(R_{Last} = 0) = I_k = U_1/R_1 = 10V/1kOhm = 10mA$

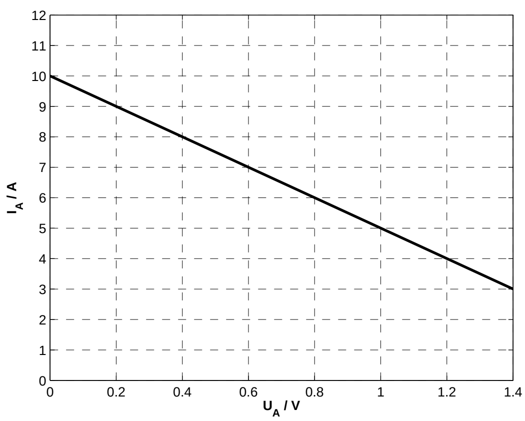
(b) Wie groß ist die Lastspannung U_{Last} für $R_{Last} \to \infty$?

Lösung:
$U_{Last}(R_{Last} \to \infty) = U_0 = U_1 \frac{R_2}{R_1+R_2} = 10V \cdot \frac{1}{2} = 5V$

(c) Für welchen Wert von R_{Last} ist die Wirkleistung am Lastwiderstand P_{Last} maximal?

Lösung:
$R_{Last}(P_{Last,max}) = R_i = R_1 || R_2 = 500\Omega$

6.2. Ersatzspannungsquelle (2 Punkte)

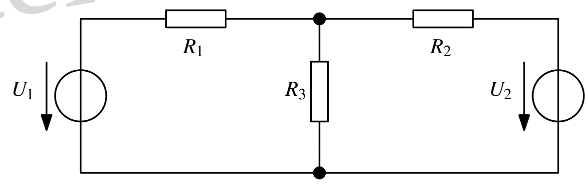


Im Labor wurde die oben stehende Kennlinie einer Spannungsquelle aufgenommen. Bestimmen Sie die Kenngrößen I_k, U_0 und R_i der Ersatzspannungsquelle.

Lösung:

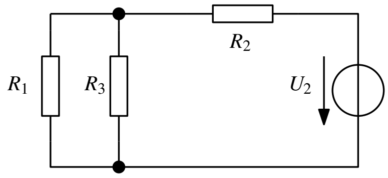
$abgelesen: I_k = 10A$
$abgelesen: R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{1V}{5A} = 0,2\Omega$
$gerechnet: U_0 = I_k \cdot R_i = 2V$

6.3. Superposition (2 Punkte)

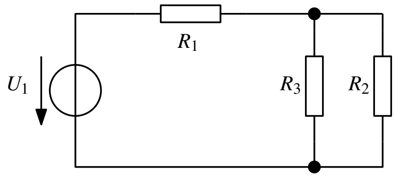


Zeichnen Sie alle Ersatzschaltbilder, die für die Berechnung dieser Schaltung per *Superpositionsprinzip* notwendig wären.

Lösung:

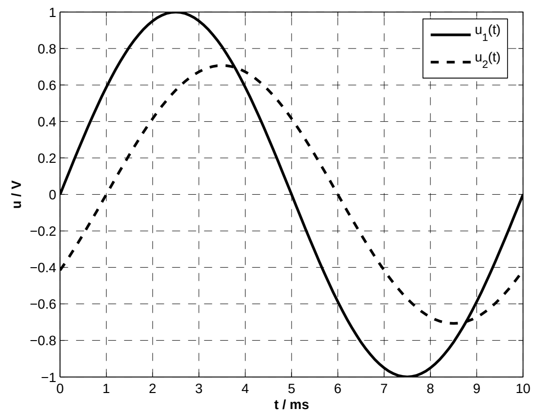


(a) U_1=KS



(b) U_2=KS

6.4. Phasenwinkel (1 Punkt)

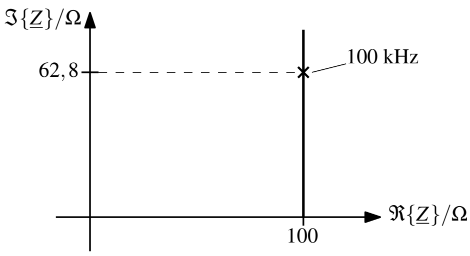


Bestimmen Sie aus den obigen Zeitverläufen den Phasenwinkel φ_2 von $\underline{U}_2$ bezogen auf $\underline{U}_1$.

Lösung:

$\underline{U}_2$ *eilt* $\underline{U}_1$ *um 1ms nach oder* $\Delta t = -1ms$. $\varphi = \Delta t \cdot \frac{360°}{T} = -1ms \cdot \frac{360°}{10ms} = -36°$

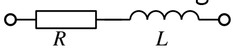
6.5. Ortskurve (2 Punkte)



Im Labor wird die oben stehende Ortskurve für die Impedanz $\underline{Z}(f)$ gemessen. Um welche Schaltung handelt es sich? Bestimmen Sie die Bauteilwerte.

Lösung:

Reihenschaltung von R und L:



$\underline{Z} = 100\Omega + j\ 62,8\Omega$
$\rightarrow \Re\{\underline{Z}\} = R = 100\Omega$
$\rightarrow \Im\{\underline{Z}\} = j\omega L = 62,8\Omega \rightarrow L = \frac{62,8\Omega}{2\pi \cdot 100\ kHz} \approx 100\mu H$

6.6. Resonanz (2 Punkte)

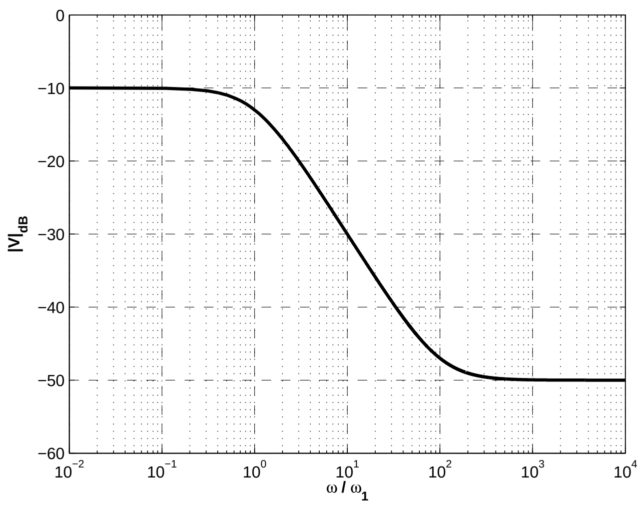
(a) Wie äußert sich die Resonanzfrequenz f_0 eines Reihenschwingkreises?

Lösung:
Bei konstant anliegender Wechselspannung ist der Strom maximal oder der resultierende Widerstand der Schaltung minimal.

(b) Geben Sie die Formel für die Resonanzfrequenz an.

Lösung:
In der Schwingungs-DGL (2. Ordnung) wird ω_0 im Term ω_0^2 als Resonanzfrequenz definiert. Bei einer RLC-Reihenschaltung ergibt sich bekanntermaßen $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Also ist $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

6.7. Betragsfrequenzgang (1 Punkt)



Sie messen den oben stehenden Betragsfrequenzgang. Stellen Sie diesen durch eine Übertragungsfunktion in Normalform dar.

Lösung:

$V = K \cdot \frac{1}{1+j\omega\tau_1} \cdot (1 + j\omega\tau_2)$
mit $\tau_1 = \frac{1}{\omega_1}$ *und* $\tau_2 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{100 \cdot \omega_1}$

6.8. Zweitorparameter (1 Punkt)

Wie messen Sie den Parameter $\underline{Z}_{12}$?

Lösung:

- $\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\Big|_{\underline{I}_1=0}$
- *LL am Eingang*
- *Spg.Quelle mit Messwiderstand R_{Mess} am Ausgang anschließen.*
- *$\underline{U}_1$ nach Betrag (Amplitude geht auch!) und Phase messen.*
- *$\underline{I}_2$ nach Betrag (Amplitude geht auch!) und Phase durch Spannungsabfall über R_{Mess} messen.*
- *Rechnen!*

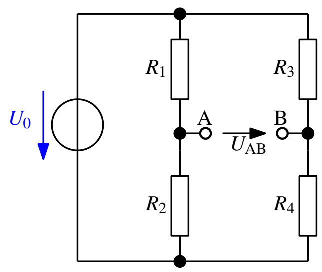
6.9. Strommessung (1 Punkt)

Wie messen Sie im allgemeinen einen zeitlichen Stromverlauf mit dem Oszilloskop?

Lösung:

- *Spannungsabfall $u(t)$ über einem Messwiderstand (Shunt) R_{Mess} hat die selbe Phasenlage wie der hindurchfließende Strom. φ ist direkt ablesbar!*
- *Momentanwert des Stromes $i(t)$ wird mit $i(t) = \frac{u(t)}{R_{Mess}}$ errechnet.*

6.10. Brückenschaltung (1 Punkt)



$U_0 = 10\text{V}$, $R_1 = 10\text{k}\Omega$, $R_2 = 90\text{k}\Omega$, $R_3 = 90\text{k}\Omega$, $R_4 = 10\text{k}\Omega$

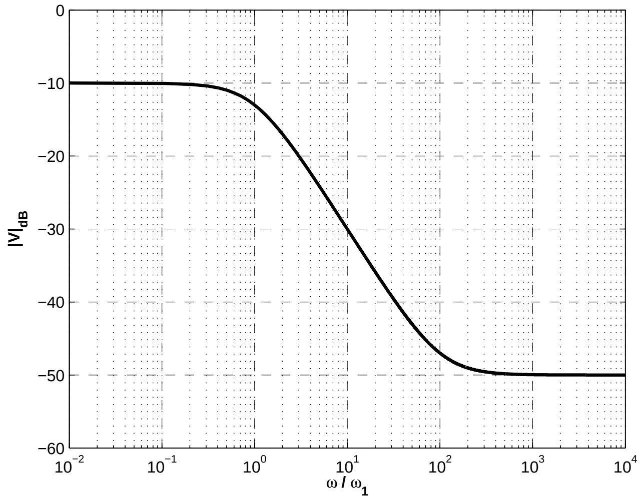
Berechnen Sie die Spannung U_{AB}.

Lösung:

$$U_A = 9V \;, U_B = 1V$$
$$\Rightarrow U_{AB} = U_A - U_B = 8V$$

. . . oder so ähnlich!

6.11. Ausgangsamplitude (1 Punkt)



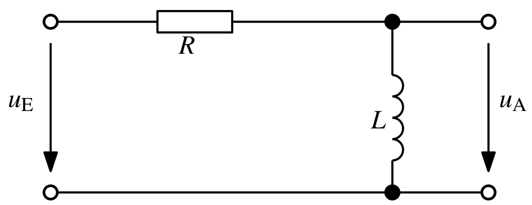
Sie legen eine sinusförmige Eingangsspannung mit einer Amplitude $\hat{U}_E = 10$V und der Frequenz $\omega = 10 \cdot \omega_1$ an ein System mit dem oben gezeigten Betragsfrequenzgang an. Wie groß ist die Amplitude der Ausgangsspannung $\hat{U}_A$?

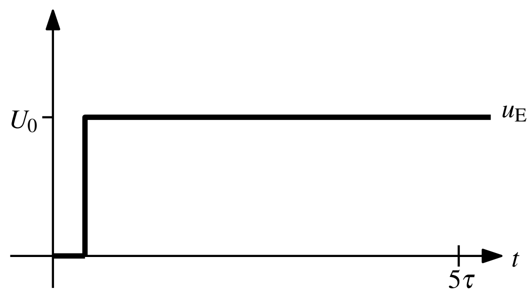
Lösung:

$$|V|_{dB}(\omega_1) = -30d\text{B} = 0,032$$
$$\Rightarrow \hat{U}_A = 0,032 \cdot 10V = 0,32V$$

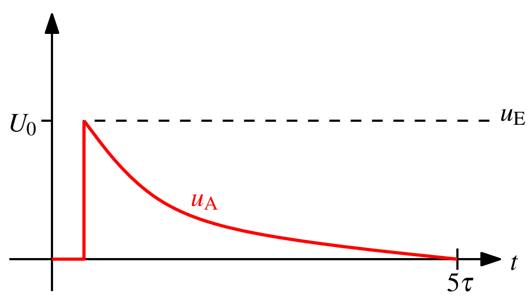
6.12. RL-Glied (1 Punkt)

Skizzieren Sie den Zeitverlauf der Ausgangsspannung u_A in das Diagramm.



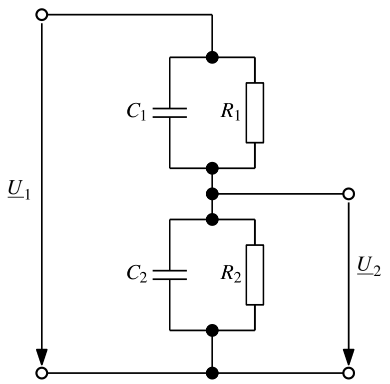


Lösung:

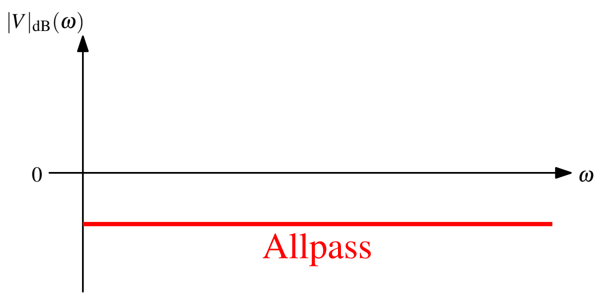


6.13. Komplexer Spannungsteiler (1 Punkt)

Skizzieren Sie für den gezeigten komplexen Spannungsteiler den Betragsfrequenzgang $|V|_{dB}(\omega) = 20\lg\left(\left|\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right|\right)$. Der Teiler ist abgestimmt! Es gilt daher $\frac{R_1}{R_2} = \frac{C_2}{C_1}$.



Lösung:



6.14. Messung Frequenzgang (1 Punkt)

Beschreiben Sie wie Sie den Betrags- und den Phasenfrequenzgang eines beliebigen Zweitores messen.

Lösung:

- *Ein Funktionsgenerator wird am Eingang des 2-Tores angeschlossen* $\Rightarrow$ *Sinusförmige Eingangsspannung* u_1 .
- *Mit zwei Tastköpfen werden* u_1 *und die Ausgangsspannung* u_2 *auf dem Oszilloskop dargestellt.*
- *Die Eingangsfrequenz* f_1 *wird im gewünschten Bereich variiert.*
- *Für jeden Frequenzwert werden dann die Amplituden* $\hat{U}_1$ *und* $\hat{U}_2$ *(Beträge gehen auch!) sowie die Phasenverschiebung von* u_2 *gegenüber* u_1 *als Zeitversatz* Δt *(z.B. bei Nulldurchgängen) bestimmt.*
- *Rechnen:*
  - $\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} \rightarrow$ *Betragsfrequenzgang*
  - $\frac{\Delta t}{T} = \frac{\varphi}{360^\circ} \rightarrow$*Phasenfrequenzgang*