

# 1. Klausur

## Elektrische Netzwerke Veröffentlichte Musterklausur 2012



Musterloesung

Name: .....

Vorname: .....

Matr.-Nr.: .....

Bearbeitungszeit: 180 Minuten

- Trennen Sie den Aufgabensatz **nicht** auf.
- Benutzen Sie für die Lösung der Aufgaben **nur** das mit diesem Deckblatt ausgeteilte Papier. **Lösungen, die auf anderem Papier geschrieben werden, können nicht gewertet werden.** Weiteres Papier kann bei den Tutoren angefordert werden.
- **Notieren Sie bei der Aufgabe einen Hinweis, wenn die Lösung auf einem Extrablatt fortgesetzt wird**
- **Schreiben Sie deutlich!** Doppelte, unleserliche oder mehrdeutige Lösungen können nicht gewertet werden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift!
- Schreiben Sie nur in **blau** oder **schwarz!**

### Bewertung

Aufgabe	Punkte	erreicht
1	15	
2	15	
3	15	
4	15	
5	15	
6	15	

# 1. Aufgabe (15 Punkte): Fragen zur Vorlesung

## 1.1. Harmonische Größe (1 Punkt)

Was versteht man unter dem Begriff *harmonische Größe*?

**Lösung:**

Eine Größe, deren Zeitverlauf durch die Sinus- bzw. Cosinus-Funktion zu beschreiben ist.

## 1.2. Begriff Ortskurve (2 Punkte)

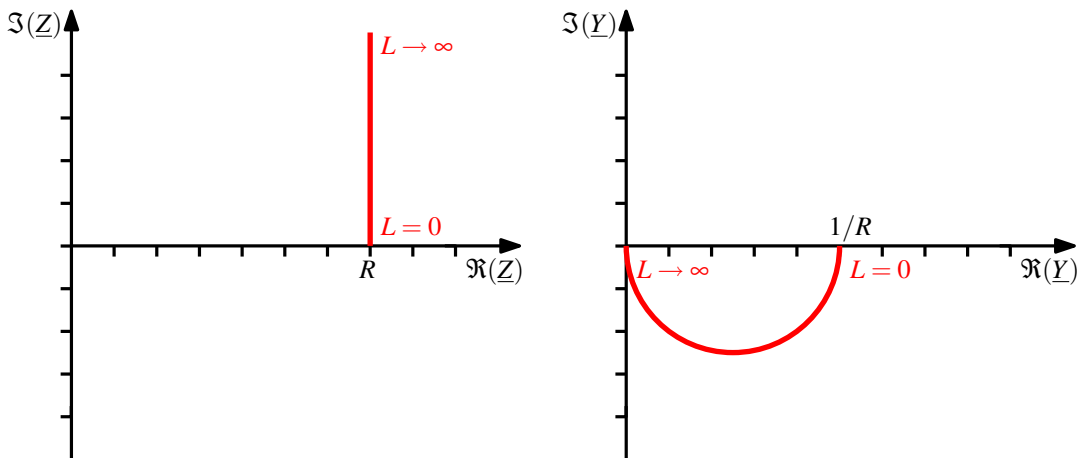
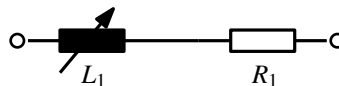
Erklären Sie stichpunktartig, was man unter dem Begriff *Ortskurve* versteht und welche Voraussetzungen zu deren Verwendung erfüllt sein müssen.

**Lösung:**

- Ortskurven sind die Spitzen von Zeigern in der komplexen Ebene bei Variation eines reellen Parameters.
- Voraussetzungen sind lineare Bauelemente und das Erreichen des eingeschwungenen Zustandes

## 1.3. Ortskurve (2 Punkte)

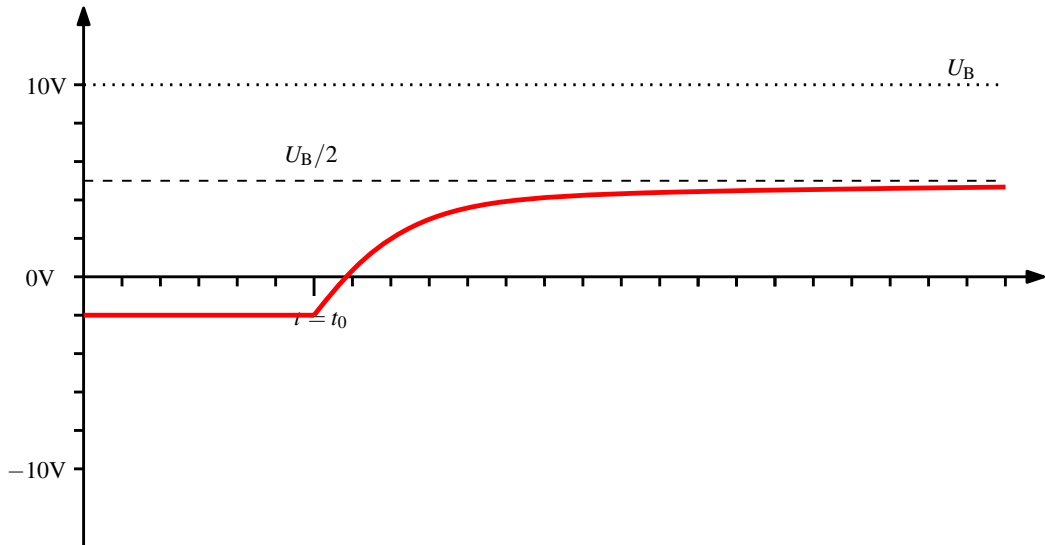
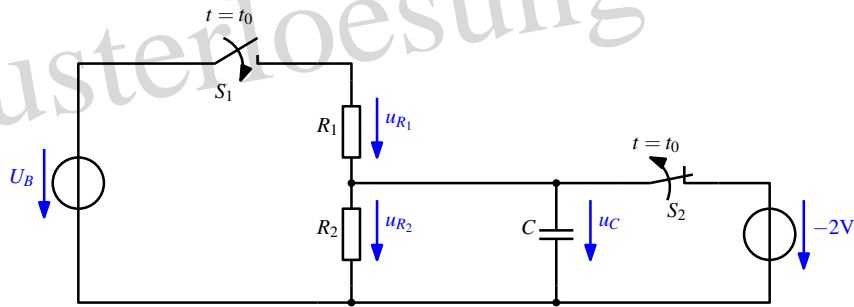
Zeichnen Sie den Verlauf der Ortskurve für *Impedanz* und *Admittanz* der RL-Reihenschaltung in Abhängigkeit des Parameters  $L$  in die vorbereiteten Diagramme ein.  $\omega$  sei konstant. Markieren Sie die Punkte  $L = 0$  und  $L \rightarrow \infty$  in beiden Ortskurven!



## 1.4. Ausgleichsvorgang (3 Punkte)

Skizzieren Sie den Verlauf der Kondensatorsspannung  $u_C(t)$ , wenn der Schalter  $S_1$  zur Zeit  $t = t_0$  geschlossen und der Schalter  $S_2$  gleichzeitig geöffnet wird. Es gilt  $R_1 = R_2$ ,  $U_B = 10V$  und  $u_C(t < t_0) = -2V$ .

Musterlösung



**1.5. Generator im Verbraucherzählpeilsystem (1 Punkt)**

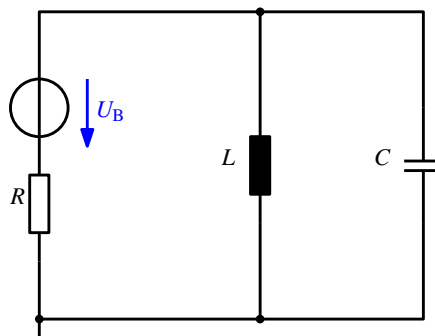
Was gilt für die Leistung an einem Generator im Verbraucherzählpeilsystem?

**Lösung:**

Die Pfeilrichtungen von Strom und Spannung sind entgegengesetzt, die Leistung wird negativ gezählt.

**1.6. Quellenteilung (1 Punkt)**

Erläutern Sie das Verfahren der Quellenteilung am Beispiel der gegebenen Schaltung, indem sie die Spannungsquellen zu nur einer Spannungsquelle  $U_B$  zusammenfassen.



**1.7. Torbedingung am Zweitor (1 Punkt)**

Was bedeutet die Einhaltung der Torbedingung an einem allgemeinen Zweitor?

Musterloesung



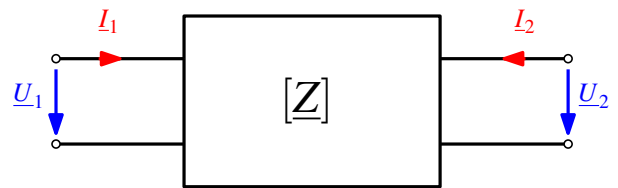
**Lösung:**

Für jedes Tor muss gelten  $I_{xA} = I_{xB}$

**1.8. Z-Matrix eines Zweitors (2 Punkte)**

Geben Sie Elemente der Z-Matrix  $\underline{Z}_{m,n}$  eines Zweitors in allgemeiner Form an.

**Hinweis:** Es gilt  $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$



**Lösung:**

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}_{1,1} &= \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} & \underline{Z}_{1,2} &= \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \\
 \underline{Z}_{2,1} &= \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} & \underline{Z}_{2,2} &= \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0}
 \end{aligned}$$

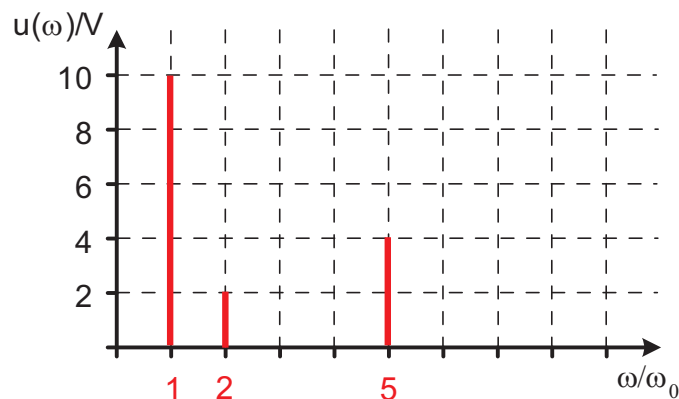
(1)

**1.9. Harmonische Zerlegung (1 Punkt)**

Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum der Spannung

$$u(t) = 10V \sin(\omega_0 t) + 2V \sin(2\omega_0 t) + 4V \sin(5\omega_0 t)$$

mit  $\omega_0 = 2\pi \cdot 50\text{Hz}$



---

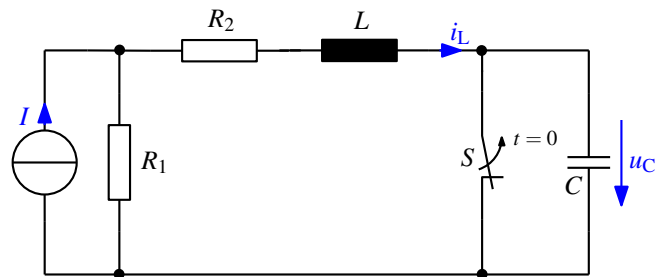
**1.10. Tiefpassfilter erster Ordnung (1 Punkt)**

Geben Sie eine schaltungstechnische Realisierung für ein Tiefpassfilter erster Ordnung an.

**Lösung:**

*Es sollte ein RC-TP oder ein RL-TP werden.*

## 2. Aufgabe (15 Punkte): Ausgleichsvorgang 2. Ordnung



$$R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega, L = 2\text{mH}, C = 100\text{nF}, I = 3\text{A}$$

Die gezeigte Schaltung befindet sich im eingeschwungenen Zustand. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird der Schalter  $S$  geöffnet.

### 2.1. Randbedingungen (4 Punkte)

Geben Sie  $i_L$  und  $u_C$  für jeweils  $t = 0$  und  $t \rightarrow \infty$  an.

*Lösung:*

$$\begin{aligned} i_L(t=0) &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I = \frac{5}{5 + 10} \cdot 3\text{A} = 1\text{A} \\ u_C(t=0) &= 0\text{V} \\ i_L(t \rightarrow \infty) &= 0\text{A} \\ u_C(t \rightarrow \infty) &= R_1 \cdot I = 5\Omega \cdot 3\text{A} = 15\text{V} \end{aligned}$$

### 2.2. Differenzialgleichung der Kondensatorspannung (3 Punkte)

Stellen Sie für  $t \geq 0$  die Differenzialgleichung für  $u_C$  in Normalform auf.

*Lösung:*

Es ist möglich und in diesem Beispiel vorteilhaft, die Stromquelle vorher in eine Spannungsquelle umzuwandeln, jedoch wird hier nur der Lösungsweg mit der Stromquelle gezeigt.

$$\begin{aligned} i_L &= i_C = C \frac{du_C}{dt} \\ u_L &= L \frac{di_L}{dt} = LC \frac{du_C^2}{dt^2} \\ u_{R_2} &= R_2 i_L \\ u_{R_1} &= u_{R_2} + u_L + u_C \end{aligned}$$

Berechnen...

$$\begin{aligned} I &= \frac{u_{R_1}}{R_1} + i_L \Rightarrow u_{R_1} + R_1 i_L = R_1 I \Rightarrow u_{R_2} + u_L + u_C + R_1 i_L = R_1 I \Rightarrow \\ u_L + (R_1 + R_2) i_L + u_C &= R_1 I \Rightarrow LC \frac{du_C^2}{dt^2} + (R_1 + R_2) C \frac{du_C}{dt} + u_C = R_1 I \Rightarrow \\ \frac{du_C^2}{dt^2} + \frac{R_1 + R_2}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C &= \frac{R_1 I}{LC} \end{aligned}$$

### 2.3. Dämpfung und Resonanz (2 Punkte)

Berechnen Sie den Dämpfungsfaktor  $\delta$  und die Resonanzfrequenz  $\omega_0$ .

**Lösung:**

Die Definition von  $2\delta = \frac{R_1+R_2}{L}$  and  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  ergibt:

$$\delta = \frac{R_1 + R_2}{2L} = \frac{15\Omega}{2 \cdot 2\text{mH}} = 3,75 \cdot 10^3 \text{s}^{-1}, \quad (2)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{2\text{mH} \cdot 100\text{nF}}} = 7,07 \cdot 10^4 \text{s}^{-1}. \quad (3)$$

### 2.4. Lösungsansatz (2 Punkte)

Geben Sie die allgemeinen Lösungsansätze für  $u_C(t)$  und  $i_L(t)$  an.

**Lösung:**

Die partikuläre Lösung von  $u_C(t)$  lautet:

$$u_{Cp}(t) = R_1 I. \quad (4)$$

Da gilt:  $\delta < \omega_0$ , lautet die allgemeine Lösung für  $u_C(t)$

$$u_{Ch}(t) = e^{-\delta t} [K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)], \quad (5)$$

mit  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ .

Summation von (4) und (5):

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) = e^{-\delta t} [K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)] + R_1 I. \quad (6)$$

Somit ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} \left\{ e^{-\delta t} [K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)] + R_1 I \right\} \\ &= C \frac{de^{-\delta t}}{dt} \cdot [K_1 \cos(\omega t) + CK_2 \sin(\omega t)] + e^{-\delta t} \cdot \frac{d}{dt} [K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)] \\ &= -C\delta e^{-\delta t} [K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)] + C e^{-\delta t} [-K_1 \omega \sin(\omega t) + K_2 \omega \cos(\omega t)] \\ &= -C e^{-\delta t} [(\delta K_1 - \omega K_2) \cos(\omega t) + (\omega K_1 + \delta K_2) \sin(\omega t)]. \end{aligned} \quad (7)$$

### 2.5. Lösung (2 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe der Randbedingungen die Lösungen für  $u_C(t)$  und  $i_L(t)$ . Geben Sie dabei die Konstanten der Lösung als Zahlenwerte an.

**Lösung:**

Einsetzen von  $t = 0$  in (6) und (7):

$$u_C(0) = K_1 + R_1 I i_L(0) = -C(\delta K_1 - \omega K_2). \quad (8)$$

Da gilt:

$$u_C(0) = 0\text{V} \quad (9)$$

$$i_L(0) = 1\text{A}, \quad (10)$$

Die Gleichungen für  $K_1$  und  $K_2$  sind:

$$K_1 + R_1 I = 0\text{V} \quad (11)$$

$$-C(\delta K_1 - \omega K_2) = 1\text{A}, \quad (12)$$

Die Lösung der Gleichungen lautet:

$$K_1 = -R_1 I = -15\text{V} \quad (13)$$

$$K_2 = \frac{1\text{A} - \delta R_1 C I}{\omega C} \approx \frac{1\text{A}}{\omega C} = 142\text{V}. \quad (14)$$

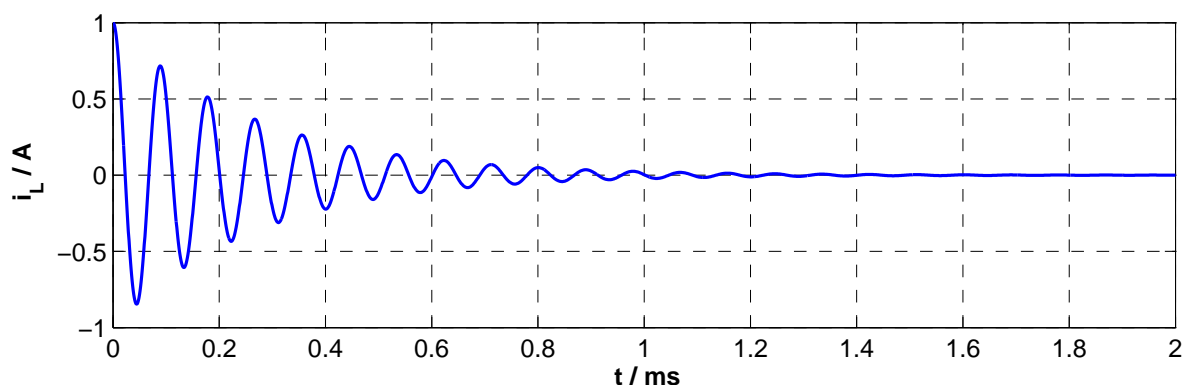
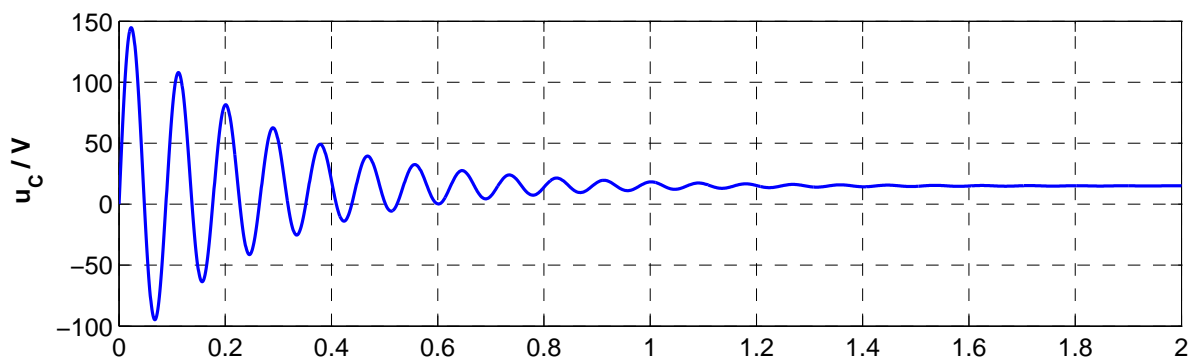
Einsetzen von (13) und (14) zurück nach (6) und (7):

$$u_C(t) = e^{-\delta t} \left[ -R_1 I \cos(\omega t) + \frac{1\text{A} - \delta R_1 C I}{\omega C} \sin(\omega t) \right] + R_1 I \quad (15)$$

$$i_L = -C e^{-\delta t} \left[ \left( -\delta R_1 I - \omega \frac{1\text{A} - \delta R_1 C I}{\omega C} \right) \cos(\omega t) + \left( -\omega R_1 I + \delta \frac{1\text{A} - \delta R_1 C I}{\omega C} \right) \sin(\omega t) \right] \quad (16)$$

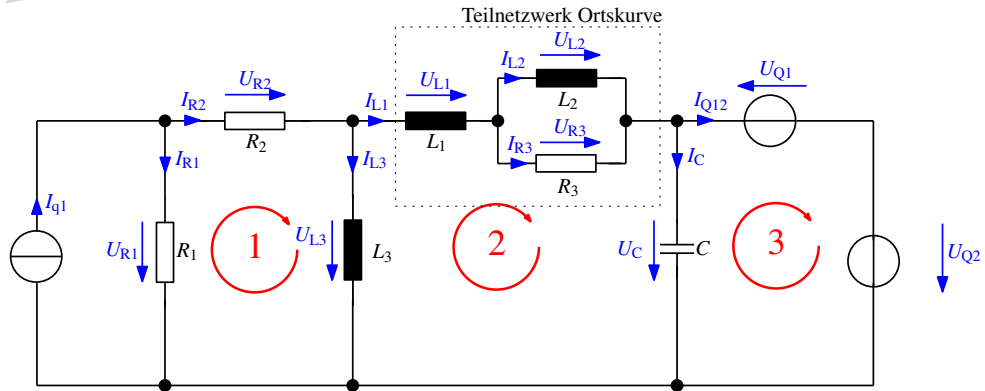
## 2.6. Darstellung der Zeitverläufe (2 Punkte)

Skizzieren Sie die Zeitverläufe für  $u_C(t)$  und  $i_L(t)$ .





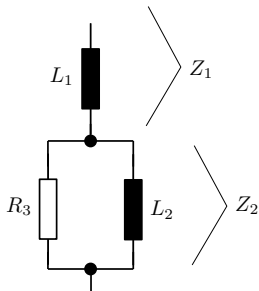
3. Aufgabe (15 Punkte): Ortskurve und Maschenstromverfahren



3.1. Ortskurve (3 Punkte)

Skizzieren Sie die Ortskurve der Impedanz  $Z_1(\omega)$  für das Teilnetzwerk bestehend aus  $L_1$ ,  $L_2$  und  $R_3$  (gestrichelter Kasten) im unten stehenden Diagramm. Tragen Sie hierfür die Teilortskurven auf und konstruieren Sie daraus den Gesamtverlauf.

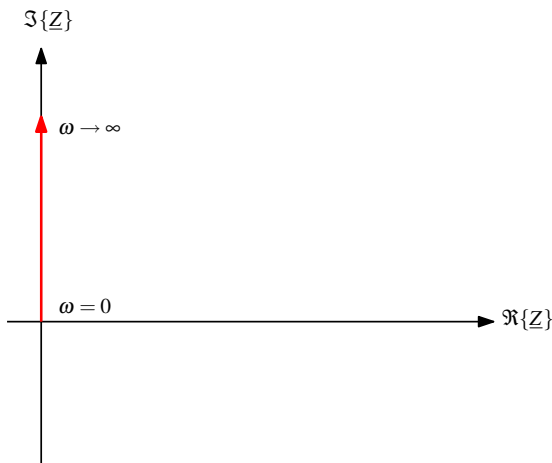
Lösung:



$$Z_1 = j\omega L_1$$

$$\omega = 0 \Rightarrow Z_1 = 0$$

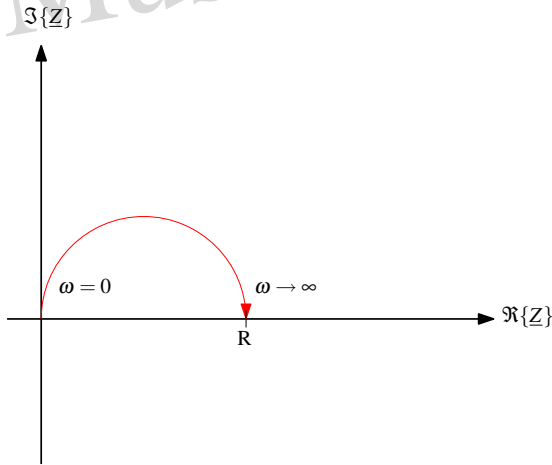
$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow Z_1 \rightarrow \infty$$



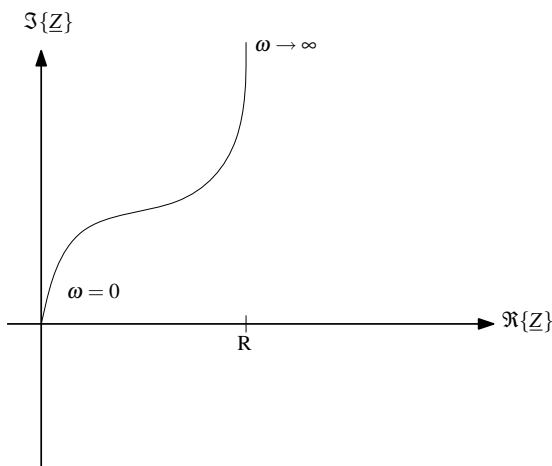
$$Z_2 = R_3 \parallel L_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{L_2}} = \frac{1}{\frac{j\omega L_2 + R_3}{R_3 \cdot j\omega L_2}} = \frac{R_3 \cdot j\omega L_2}{j\omega L_2 + R_3} = \frac{R_3}{1 + \frac{R_3}{j\omega L_2}}$$

$$\omega = 0 \Rightarrow Z_2 = 0$$

$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow Z_2 = R_3$   
 $\omega = \text{beliebig} \Rightarrow Z = +jX$



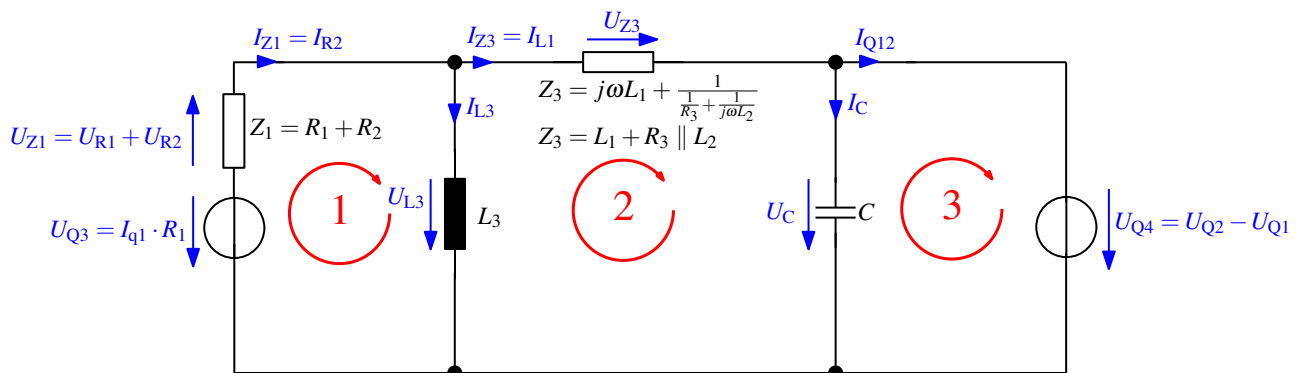
$$Z_{\text{gesamt}} = Z_1 + Z_2$$



### 3.2. Vorbereitung der Schaltung (2 Punkte)

Bereiten Sie durch Vereinfachungen die oben gezeigte Schaltung für eine Maschenstromanalyse vor. Verwenden Sie die vorliegende Maschennumerierung. Fassen Sie alle Elemente im gestrichelten Kasten zu einer Impedanz zusammen.

**Lösung:**



### 3.3. Maschengleichungen (3 Punkte)

Stellen Sie für die Maschen 1...3 die zugehörigen Maschengleichungen auf. Sortieren Sie diese so um, dass sich daraus die Elemente der Impedanzmatrix direkt ablesen lassen.

**Lösung:**

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot I_{M1} + Z_{L3}(I_{M1} - I_{M2}) &= U_{Q3} \\ \Rightarrow I_{M1} \cdot (Z_1 + Z_{L3}) + I_{M2} \cdot (-Z_{L3}) &= U_{Q3} \end{aligned}$$

mit  $Z_1 = R_1 + R_2, Z_{L3} = j\omega L_3$  und  $U_{Q3} = I_{q1} \cdot R_1$

$$\begin{aligned} Z_{L3}(I_{M2} - I_{M1}) + Z_3 \cdot I_{M2} + Z_C \cdot (I_{M2} - I_{M3}) &= 0 \\ \Rightarrow I_{M1} \cdot (-Z_{L3}) + I_{M2}(Z_{L3} + Z_3 + Z_C) + I_{M3} \cdot (-Z_C) &= 0 \end{aligned}$$

mit  $Z_3 = j\omega L_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + j\omega L_2}$  und  $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$

$$\begin{aligned} Z_C(I_{M3} - I_{M2}) &= -U_{Q4} \\ \Rightarrow I_{M1} \cdot 0 + I_{M2} \cdot (-Z_C) + I_{M3} \cdot Z_C &= -U_{Q4} \end{aligned}$$

mit  $U_{Q4} = U_{Q2} - U_{Q1}$

### 3.4. Impedanzmatrix (2 Punkte)

Erstellen Sie aus den Maschengleichungen in Aufgabe 3.3 die Impedanzmatrix  $\underline{Z}$  des Netzwerkes.

**Lösung:**

$$\begin{pmatrix} (Z_1 + Z_{L3}) & -Z_{L3} & 0 \\ -Z_{L3} & (Z_{L3} + Z_3 + Z_C) & -Z_C \\ 0 & -Z_C & Z_C \end{pmatrix}$$

### 3.5. Quellenvektor (1 Punkt)

Erstellen Sie aus den Maschengleichungen in Aufgabe 3.3 den Quellenvektor  $\underline{U}_q$  des Netzwerkes.

**Lösung:**

$$\begin{pmatrix} U_{Q3} \\ 0 \\ -U_{Q4} \end{pmatrix}$$

mit  $U_{Q3} = I_{q1} \cdot R_1$  und  $U_{Q4} = U_{Q2} - U_{Q1}$

### 3.6. Inzidenzmatrix (4 Punkte)

Stellen Sie die Beziehung der echten Ströme des Ausgangsnetzwerkes zu den virtuellen Maschenströmen formelmäßig her. Stellen Sie daraus die Inzidenzmatrix  $\underline{A}$  sowie den dazu gehörigen Vektor der Einzelströme des Ausgangsnetzwerkes  $\underline{I}$  auf und geben Sie die Berechnungsformel für den Strom  $I_{R1}$  an.

**Lösung:**

Einzelströme für die Inzidenzmatrix:

$I_{R1}$  = muss separat berechnet werden

$I_{R2} = I_{M1}$

$I_{L1} = I_{M2}$

$I_{L3} = I_{M1} - I_{M2}$

$I_C = I_{M2} - I_{M3}$

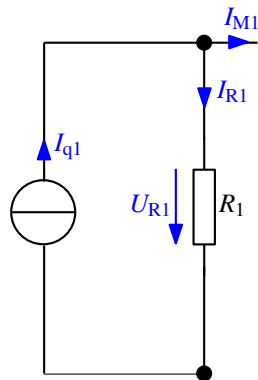
$I_{Q12} = I_{M3}$

Vektor der Einzelströme :

$$\underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_{R2} \\ I_{L1} \\ I_{L3} \\ I_C \\ I_{Q12} \end{pmatrix}$$

Inzidenzmatrix:

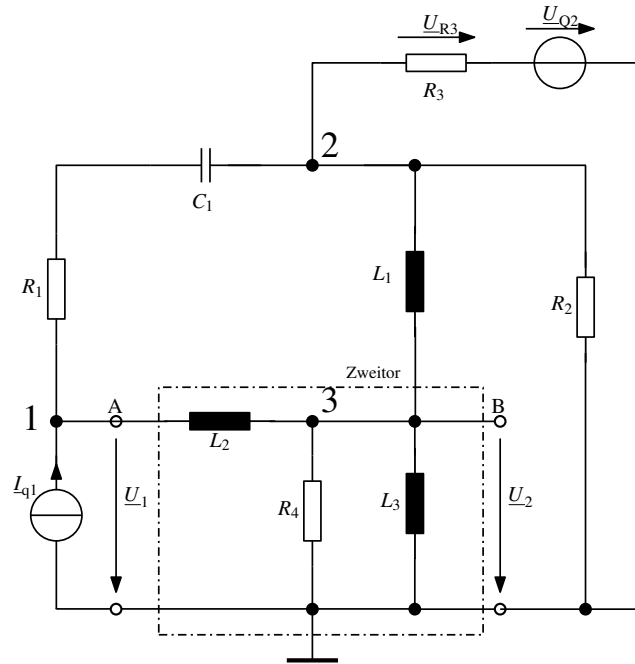
$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$



Der Strom  $I_{R1}$ :

$$I_{q1} - I_{M1} = I_{R1}$$

**4. Aufgabe (15 Punkte): Knotenpotentialverfahren mit Zweitor**

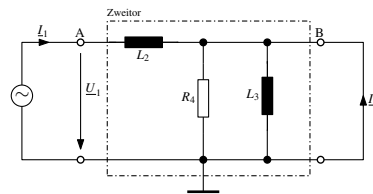


**4.1. Reihen-Parallelmatrix  $\underline{H}$  (5 Punkte)**

Berechnen Sie für das Zweitor zwischen den Punkten **A** und **B** bestehend aus  $L_2$ ,  $L_3$  und  $R_4$  (gestrichelter Kasten) die Elemente der Reihen-Parallelmatrix  $\underline{H}$ .  $\underline{U}_1$  sei dabei die Eingangs- und  $\underline{U}_2$  die Ausgangsspannung.

**Lösung:**

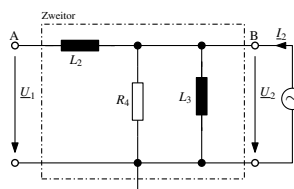
*KS am Ausgang:*



$$\underline{H}_{11} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} = j\omega L_2 \quad (18)$$

$$\underline{H}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} \quad \text{mit } \underline{I}_2 = -\underline{I}_1 \Rightarrow \underline{H}_{21} = -1 \quad (19)$$

*LL am Eingang:*



Musterlösung

$$\underline{H}_{12} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{L_1=0} \quad \text{mit} \quad U_1 = U_2 \Rightarrow \underline{H}_{12} = 1 \quad (20)$$

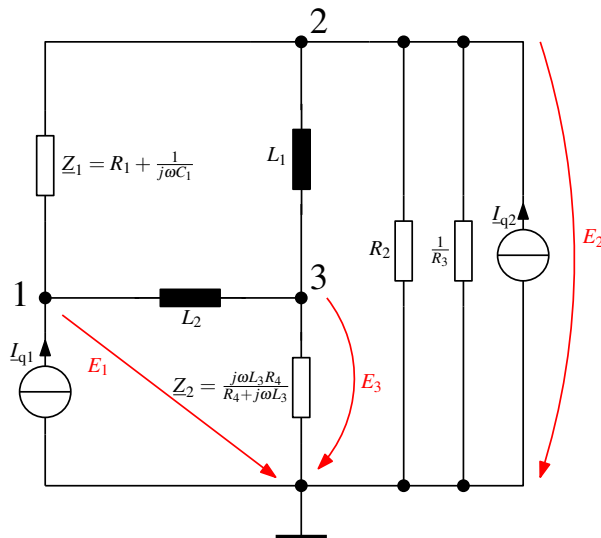
$$\underline{H}_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{L_1=0} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{j\omega L_3} \quad (21)$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} j\omega L_2 & 1 \\ -1 & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{j\omega L_3} \end{pmatrix} \quad (22)$$

**4.2. Vorbereitung der Schaltung (2 Punkte)**

Bereiten Sie durch Vereinfachungen die oben gezeigte Schaltung für eine Knotenpotentialanalyse vor. Beachten Sie dabei die Quellen und nummerieren Sie die Knoten. Zeichnen Sie anschließend die Knotenpotenzialpfeile ein.

*Lösung:*



**4.3. Knotengleichungen (3 Punkte)**

Stellen Sie für die Knoten 1...3 die zugehörigen Knotengleichungen auf. Sortieren Sie diese so um, dass sich daraus die Elemente der Admittanzmatrix direkt ablesen lassen.

*Lösung:*

Knoten 1:

$$\frac{1}{\underline{z}_1} \cdot (\underline{E}_1 - \underline{E}_2) + \frac{1}{j\omega L_2} (\underline{E}_1 - \underline{E}_3) = \underline{I}_1$$

$$\underline{E}_1 \cdot \left( \frac{1}{\underline{z}_1} + \frac{1}{j\omega L_2} \right) + \underline{E}_2 \cdot \left( -\frac{1}{\underline{z}_1} \right) + \underline{E}_3 \cdot \left( -\frac{1}{j\omega L_2} \right) = \underline{I}_1$$

Knoten 2:

$$\frac{1}{\underline{z}_1} \cdot (\underline{E}_2 - \underline{E}_1) + \frac{1}{j\omega L_1} \cdot (\underline{E}_2 - \underline{E}_3) + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \cdot \underline{E}_2 = \underline{I}_2$$

$$\underline{E}_1 \cdot \left( -\frac{1}{\underline{z}_1} \right) + \underline{E}_2 \cdot \left( \frac{1}{\underline{z}_1} + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + \underline{E}_3 \cdot \left( -\frac{1}{j\omega L_1} \right) = \underline{I}_2$$

Knoten 3:

$$\frac{1}{\underline{z}_2} \cdot \underline{E}_3 + \frac{1}{j\omega L_2} \cdot (\underline{E}_3 - \underline{E}_1) + \frac{1}{j\omega L_1} \cdot (\underline{E}_3 - \underline{E}_2) = 0$$

$$\underline{E}_1 \cdot \left( -\frac{1}{j\omega L_2} \right) + \underline{E}_2 \cdot \left( -\frac{1}{j\omega L_1} \right) + \underline{E}_3 \cdot \left( \frac{1}{\underline{z}_2} + \frac{1}{j\omega L_2} + \frac{1}{j\omega L_1} \right) = 0$$

#### 4.4. Admittanzmatrix (2 Punkte)

Erstellen Sie aus den Knotengleichungen in Aufgabe 4.3 die Admittanzmatrix  $\underline{Y}$  des Netzwerkes.

**Lösung:**

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{j\omega L_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_1} & -\frac{1}{j\omega L_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_1} & \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{j\omega L_1} \\ -\frac{1}{j\omega L_2} & -\frac{1}{j\omega L_1} & \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_2} \end{pmatrix}$$

mit  $\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$

$$\underline{Z}_2 = \frac{j\omega L_3 R_4}{R_4 + j\omega L_3}$$

#### 4.5. Quellenvektor (1 Punkt)

Erstellen Sie aus den Knotengleichungen in Aufgabe 4.3 den Quellenvektor  $\underline{I}_q$  des Netzwerkes.

Lösung:

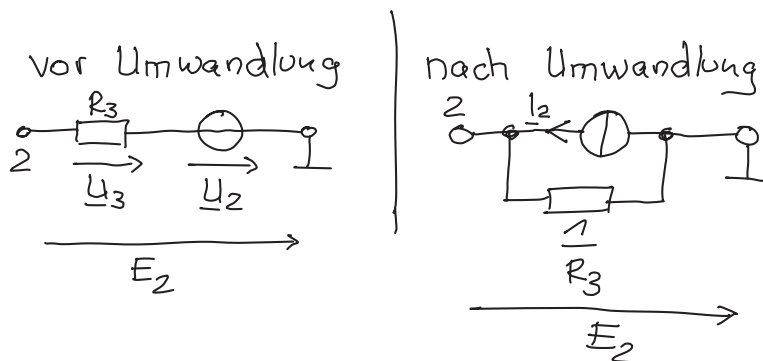
$$\underline{I}_q = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \emptyset \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{R_3}$$

#### 4.6. Einzelspannung (2 Punkte)

Berechnen Sie die Formel für die Spannung  $\underline{U}_{R3}$ .

Lösung:

$$\underline{U}_3 \circ$$

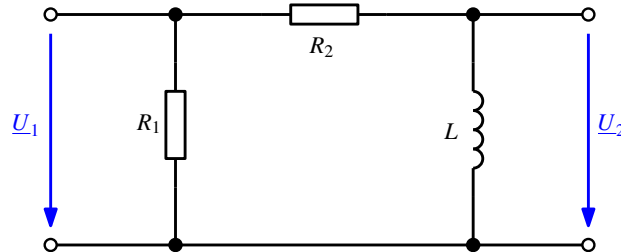


$$\Rightarrow \underline{E}_2 = \underline{U}_3 + \underline{U}_2 \Rightarrow \underline{U}_3 = \underline{E}_2 - \underline{U}_2$$



## 5. Aufgabe (15 Punkte): Frequenzverhalten von Vierpolen

Gegeben ist die Schaltung eines Zweitores mit  $R_1 = R_2 = 1\text{k}\Omega$  und  $L = 100\text{mH}$ .



### 5.1. Übertragungsfunktion (2 Punkte)

Bestimmen Sie die komplexe Übertragungsfunktion  $\underline{V}_d$  des Zweitores in Normalform (= Produkt von Teilfunktionen).

**Hinweis:** Überlegen Sie, welche Elemente des Netzwerkes wirklich für die Übertragungsfunktion relevant sind!

*Lösung:*

$$\underline{V}(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{j\omega L}{R_2 + j\omega L} = \frac{j\omega \frac{L}{R_2}}{1 + j\omega \frac{L}{R_2}} = \frac{j\omega \tau}{1 + j\omega \tau} \text{ mit } \tau = \frac{L}{R_2}$$

### 5.2. Zeitkonstanten und Grenzfrequenz (2 Punkte)

Berechnen Sie die Zeitkonstante  $\tau$  und die Grenzfrequenz  $f_{\text{Grenz}}$  der in Aufgabe 5.1 berechneten komplexen Übertragungsfunktion  $\underline{V}$ .

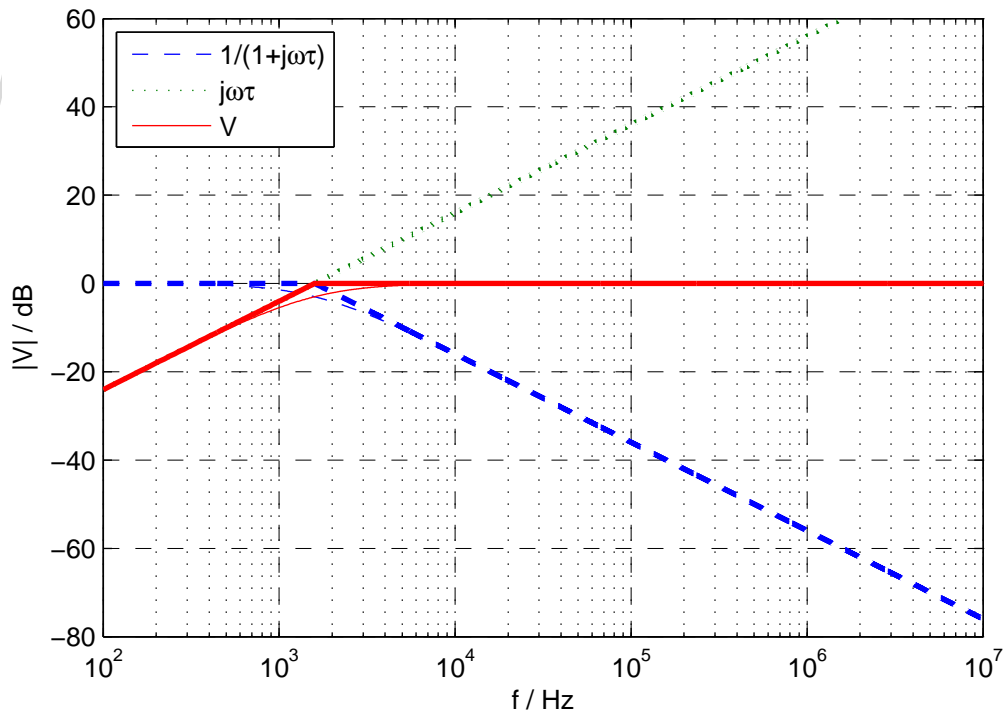
*Lösung:*

$$\tau = \frac{L}{R_2} = \frac{100\text{mH}}{1\text{k}\Omega} = 10^{-4}\text{s}$$

$$f_{\text{Grenz}} = \frac{1}{\tau \cdot 2\pi} = 1,59\text{kHz}$$

### 5.3. Betragsfrequenzgang (3 Punkte)

Stellen Sie den Betragsfrequenzgang  $|\underline{V}_{\text{dB}}(j\omega)|$  der in Aufgabe 5.1 berechneten komplexen Übertragungsfunktion  $\underline{V}_i$  in unten stehenden Diagramm dar. Machen Sie dabei den Verlauf der Teilfunktionen und die Gesamtfunktion kenntlich.



#### 5.4. Frequenzverhalten (1 Punkt)

Mit welchem Verhalten lässt sich der Betragsfrequenzgang aus Aufgabe 5.3 beschreiben?

- |                                     |                                    |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Tiefpass   | <input type="checkbox"/> Alpenpass |
| <input type="checkbox"/> Hochpass   | <input type="checkbox"/> Rückpass  |
| <input type="checkbox"/> Doppelpass | <input type="checkbox"/> Allpass   |
| <input type="checkbox"/> Bandpass   | <input type="checkbox"/> Reisepass |

**Lösung:**

Hochpass

#### 5.5. Verstärkung (2 Punkte)

Berechnen Sie die komplexe Verstärkung  $\underline{V}$  nach Betrag und Phase und den Betrag dieser Verstärkung  $|\underline{V}_{dB}|$  in dB bei der Frequenz  $f = 100\text{Hz}$ .

**Lösung:**

$$\omega(100\text{Hz}) = 2\pi \cdot 100\text{Hz} = 628,3\text{s}^{-1}$$

$$\text{aus Aufgabe davor} \rightarrow \tau = 10^{-4}\text{s}$$

$$\underline{V}(100\text{Hz}) = \frac{j \cdot 0,063}{1 + j \cdot 0,063} = \frac{0,063 \angle 90^\circ}{1 \angle 3,6^\circ} = 0,063 \angle 86,4^\circ$$

$$|\underline{V}(100\text{Hz})|_{dB} = 20 \cdot \lg(0,063) = -24\text{dB}$$

#### 5.6. Kompensation (2 Punkte)

Hinter das Netzwerk wird ein Kompensationsnetzwerk geschaltet.

Welche Übertragungsfunktion  $\underline{V}_{\text{comp}}(j\omega)$  muss das nachgeschaltete Netzwerk haben, damit sich für das gesamte System ein konstanter Amplituden- oder Betragsfrequenzgang von 0dB über den gesamten Frequenzbereich ergibt?

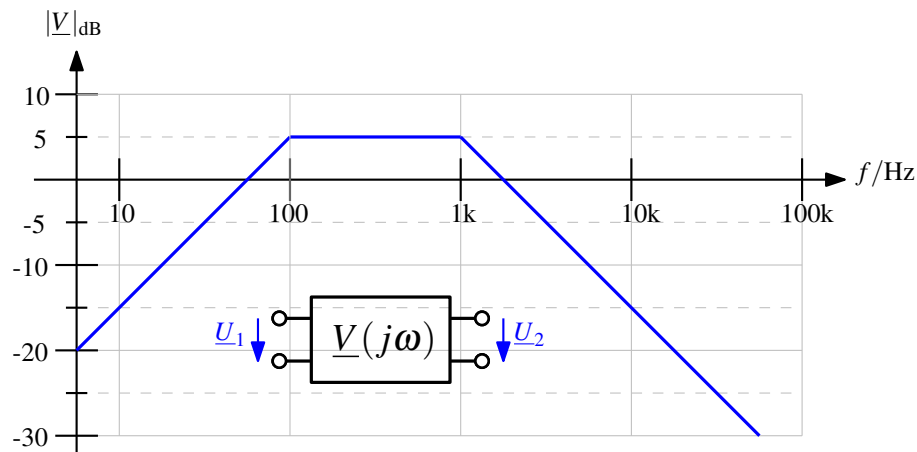
Wie groß muss die Zeitkonstante  $\tau_{\text{comp}}$  dieses Kompensationsnetzwerkes sein?

**Lösung:**

$$\begin{aligned} \underline{V}(j\omega) \cdot \underline{V}_{\text{comp}}(\omega) &\equiv 1 = 0\text{dB} \\ \Rightarrow \underline{V}_{\text{comp}} &= \frac{1 + j\omega\tau_{\text{comp}}}{j\omega\tau_{\text{comp}}} \\ \tau_{\text{comp}} = \tau &= 10^{-4}\text{s} \end{aligned}$$

### 5.7. Ausgangsspannung (3 Punkte)

Gegeben ist folgender Betragsfrequenzgang.



Gegeben sind die Amplituden des Eingangssignales  $\underline{U}_1$  für drei verschiedene Frequenzen. Füllen Sie die Tabelle mit den Werten für die Amplituden des Ausgangssignales  $\underline{U}_2$  aus.

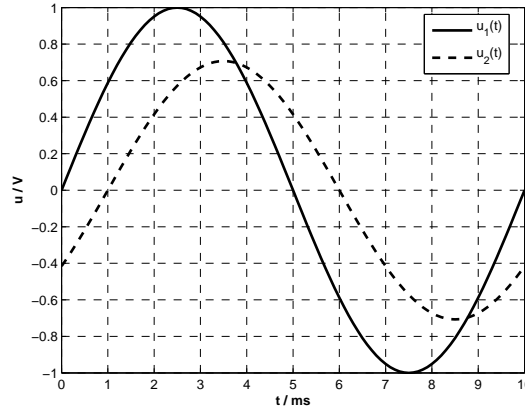
$f_1$	$\hat{U}_1$ V	$ \underline{V} $	$\hat{U}_2$ V
10Hz	10	-15dB $\rightarrow$ 0,178	$10\text{V} \cdot 0,178 = 1,78\text{V}$
500Hz	10	5dB $\rightarrow$ 1,78	$10\text{V} \cdot 1,78 = 17,8\text{V}$
10kHz	1	-15dB $\rightarrow$ 0,178	$1\text{V} \cdot 0,178 = 0,178\text{V}$

$$|\underline{V}| = 10^{|\underline{V}|_{\text{dB}}/20}$$

## 6. Aufgabe (15 Punkte): Fragen zum Praktikum

Beantworten Sie die folgenden Fragen.

### 6.1. Phasenwinkel (1 Punkt)



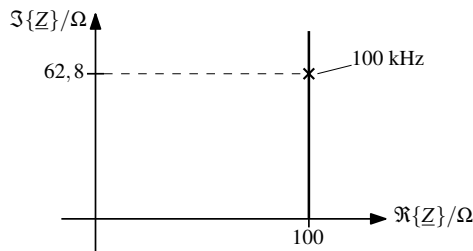
Bestimmen Sie aus den obigen Zeitverläufen den Phasenwinkel  $\varphi_2$  von  $\underline{U}_2$  bezogen auf  $\underline{U}_1$ .

**Lösung:**

$$\underline{U}_2 \text{ eilt } \underline{U}_1 \text{ um } 1 \text{ ms nach oder } \Delta t = -1 \text{ ms. } \varphi = \Delta t \cdot \frac{360^\circ}{T} = -1 \text{ ms} \cdot \frac{360^\circ}{10 \text{ ms}} = -36^\circ$$

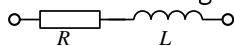
### 6.2. Ortskurve (3 Punkte)

Im Labor wird die unten stehende Ortskurve für die Impedanz  $\underline{Z}(f)$  gemessen. Um welche Schaltung handelt es sich? Bestimmen Sie die Bauteilwerte!



**Lösung:**

Reihenschaltung von  $R$  und  $L$ :



$$\underline{Z} = 100 \Omega + j 62,8 \Omega$$

$$\rightarrow \Re\{\underline{Z}\} = R = 100 \Omega$$

$$\rightarrow \Im\{\underline{Z}\} = j\omega L = 62,8 \Omega \rightarrow L = \frac{62,8 \Omega}{2\pi \cdot 100 \text{ kHz}} \approx 100 \mu\text{H}$$

### 6.3. Resonanz (2 Punkte)

(a) Wie äußert sich die Resonanzfrequenz  $f_0$  eines RLC-Reihenschwingkreises?

**Lösung:**

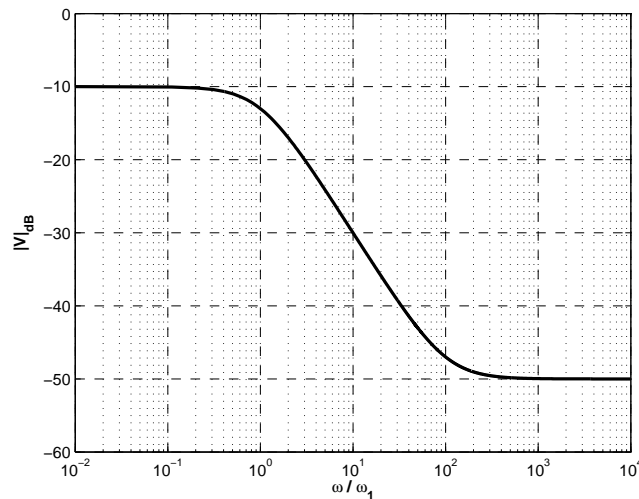
Bei konstant anliegender Wechselspannung ist der Strom maximal oder der resultierende Widerstand der Schaltung minimal.

(b) Geben Sie die Formel für die Resonanzfrequenz an.

**Lösung:**

In der Schwingungs-DGL (2. Ordnung) wird  $\omega_0$  im Term  $\omega_0^2$  als Resonanzfrequenz definiert. Bei einer RLC-Reihenschaltung ergibt sich bekanntermaßen  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ . Also ist  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

#### 6.4. Betragsfrequenzgang (4 Punkte)



Sie messen den oben stehenden Betragsfrequenzgang. Stellen Sie diesen durch eine Übertragungsfunktion in Normalform dar.

**Lösung:**

$$\underline{V} = K \cdot \frac{1}{1+j\omega\tau_1} \cdot (1+j\omega\tau_2)$$

Geben Sie die Kenngrößen der Übertragungsfunktion an.

**Lösung:**

$$K = -10\text{dB} = 0,32$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_1}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{100 \cdot \omega_1}$$

#### 6.5. Zweitorparameter (2 Punkte)

Wie messen Sie den Parameter  $\underline{Y}_{11}$ ? Geben Sie die Definitionsgleichung an und beschreiben Sie in Stichpunkten den Vorgang der Messung.

**Lösung:**

- Kurzschlussingangsadmittanz:  $\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \Big|_{\underline{U}_2=0}$
- KS am Ausgang
- (Wechsel-)Spannungsquelle mit bestimmter Frequenz über Messwiderstand (Shunt)  $R_{\text{Mess}}$  am Eingang anschließen.
- $\underline{U}_1$  nach Betrag und Phase messen.
- $\underline{I}_1$  nach Betrag und Phase durch Spannungsabfall über  $R_{\text{Mess}}$  messen.
- Rechnen!

### 6.6. Strommessung (2 Punkte)

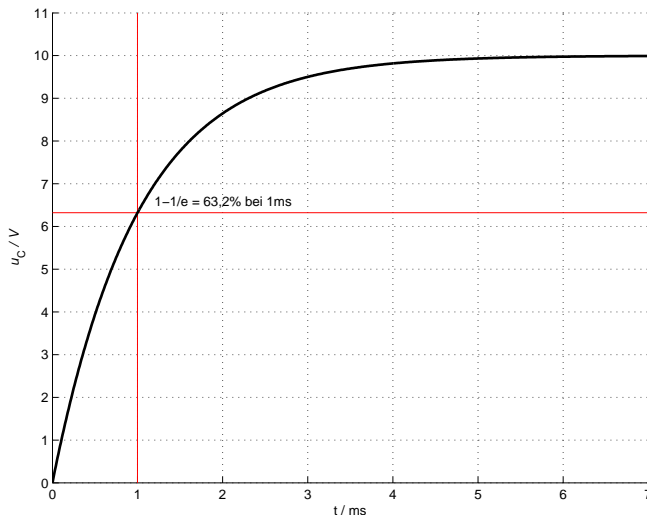
Wie messen Sie im allgemeinen einen zeitlichen Stromverlauf mit dem Oszilloskop?

**Lösung:**

- Spannungsabfall  $u(t)$  über einem Messwiderstand (Shunt)  $R_{\text{Mess}}$  hat die selbe Phasenlage wie der hindurchfließende Strom.  $\varphi$  ist direkt ablesbar!
- Momentanwert des Stromes  $i(t)$  wird mit  $i(t) = \frac{u(t)}{R_{\text{Mess}}}$  errechnet.

### 6.7. RC-Ausgleichsvorgang (1 Punkt)

Gegeben ist folgender Zeitverlauf der Aufladung eines Kondensators über einen Widerstand. Bestimmen Sie die Zeitkonstante  $\tau$  dieses Ausgleichsvorganges!



**Lösung:**

Die Zeitkonstante ist bei einer Aufladung bei  $1 - \frac{1}{e} = 63,2\%$  des Endwertes 10V. Als Ergebnis ist alles um  $\tau = 1$  ms innerhalb der Ablesegenauigkeit zulässig!