Prüfungsklausur: Energiemethoden der Mechanik — WiSe 2011/2012

Prof. Dr. rer. nat. Valentin Popov

Dieser Kasten ist vor der Bearbeitung der Klausur **vollständig** und **lesbar** auszufüllen!

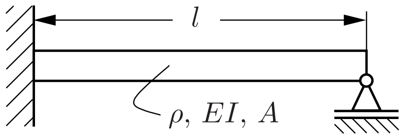
Nachname	______	Vorname	______
Studiengang	______	Matrikelnummer	______
Art der Klausur:		○ Prüfungsklausur	○ Übungsscheinklausur

Aufgabe	1	2	3	4	Σ 1 - 4	5	KorrektorIn
erreichte Punkte					/ 40	/ 10	

Die Klausur umfasst 5 Aufgaben. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 20 von 50 Punkten erreicht werden. Dabei muss jedoch Aufgabe 5 (Kurzfragen) mit mind. 5 von 10 Punkten bestanden werden. Tragen Sie die Ergebnisse des **Kurzfragenteils direkt auf dem Klausurblatt** ein (**nur diese Eintragungen werden berücksichtigt!**). Es werden **alle** Rechenaufgaben gewertet. Bitte sauber schreiben, unlesbare Lösungen werden **nicht** beachtet.

1 Bekannte Aufgabe — 9 Punkte

Für den skizzierten einseitig fest eingespannten und am anderen Ende gelenkig gelagerten Balken ermittle man nach RITZ die erste Eigenkreisfrequenz der Biegeschwingung und vergleiche sie mit dem exakten Wert:



$$\omega_{1,\,\mathrm{exakt}} = 15,42\,\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\,.$$

Warum ist die Näherungslösung wesentlich größer als die exakte Lösung?

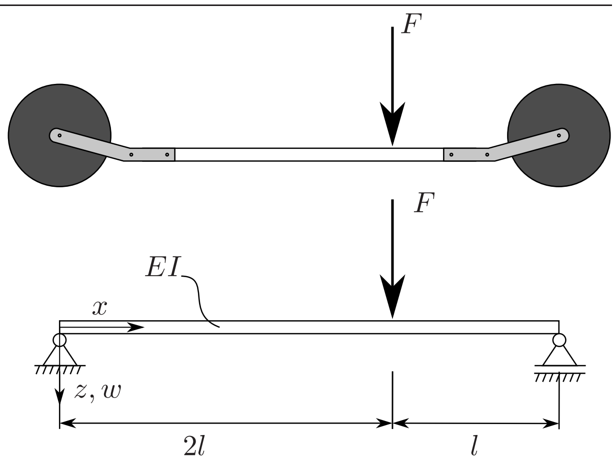
Ansatzfunktion:

$$w(x,t) = x^2(l-x)^2 q(t)$$

Geg.: ρ, A, EI, l **Hinweis:** $\int x^4(l-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{l^4x^5}{5} - \frac{2l^3x^6}{3} + \frac{6l^2x^7}{7} - \frac{lx^8}{2} + \frac{x^9}{9}$

2 Satz von Castigliano — 2+5=7 Punkte

Ein Paar Rollski sollen gebaut werden. Dafür wird eine Aluminiumschiene in zwei Rollen gehängt. Nun soll berechnet werden wie weit sich die Schiene durchbiegt. Dazu wird wie dargestellt ein vereinfachtes Modell eines schubstarren, linearelastischen Balkens verwendet. Die Aluminiumschiene der Biegesteifigkeit EI wird als fest-los gelagerter Balken der Länge $3l$ modelliert. An der Bindung bei $x = 2l$ greift die Last des Skiläufers an. Berechnen Sie unter Verwendung des zweiten Satzes von CASTIGLIANO die Durchbiegung $w(x = 2l)$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:



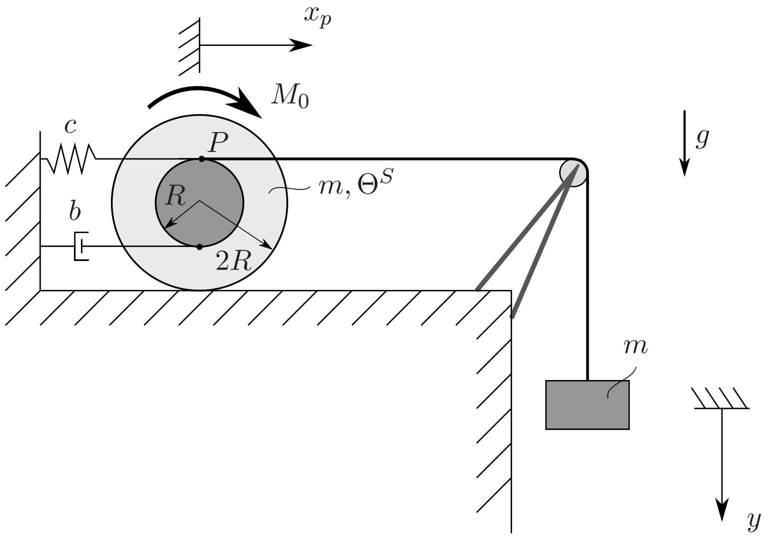
(a) Bestimmen Sie den Biegemomentenverlauf im Balken.

(b) Bestimmen Sie nun mit dem zweiten Satz von CASTIGLIANO die Durchbiegung $w(x = 2l)$.

Geg.: EI, l, F

3 Lagrangesche Gleichung 1.Art 1+5+2+5+1=14 Punkte

Eine Walze (Masse m, Massenträgheitsmoment Θ^S) ist mit einer Feder der Federsteifigkeit c (entspannte Lage bei $x_p = 0$) und einem Dämpfer (Dämpferkonstante b) wie gezeigt mit der Wand verbunden. Weiterhin wird die Walze durch ein Moment M_0 angetrieben. Zwischen Untergrund und Walze soll reines Rollen auftreten. Die Walze ist zudem über eine masselose, glatte Umlenkrolle mit einer weiteren Masse m durch ein masseloses, undehnbares, stets straffes Seil verbunden. Mittels der LAGRANGEschen Gleichungen 1.Art sollen nun die Seilkraft und die Bewegungsdifferentialgleichung bestimmt werden. Gehen Sie dabei wie folgt vor:



(a) Stellen Sie die Zwangsbedingung für die generalisierten Koordinaten x_p und y auf, wobei x_p die Koordinate des Punktes P ist.

(b) Stellen Sie die LAGRANGE-Funktion in den beiden generalisierten Koordinaten auf.

(c) Beschreiben Sie die Einflüsse des Dämpfers und des Momentes M_0 mittels Dissipationsfunktion bzw. generalisierter Kraft.

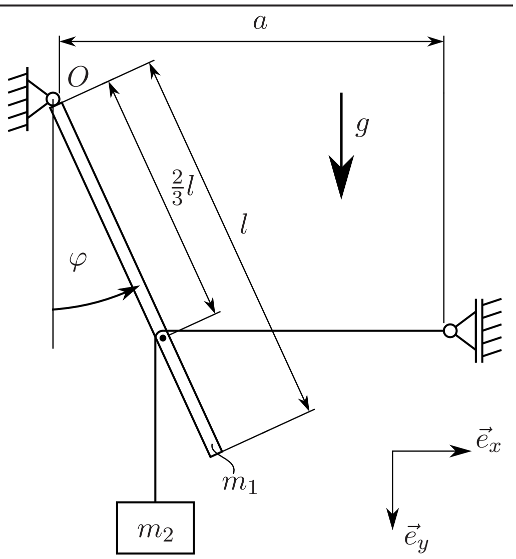
(d) Wie lauten die LAGRANGEschen Gleichungen 1. Art? Stellen Sie diese für x_p und y auf.

(e) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung und die Kraft im Seil als Funktion von $\ddot{x}_p$, $\dot{x}_p$ und x_p.

Geg.: g, m, R, b, c, M_0, $\Theta^S = 2mR^2$

4 Prinzip der virtuellen Arbeit 1+3+4+2=10 Punkte

Ein Stab der Masse m_1 und ein undehnbares, masseloses Seil an dessen Ende eine Masse m_2 hängt sind wie gezeigt miteinander verbunden. Untersuchen Sie wie groß die Masse m_2 sein muss, damit sich das System im statischen Gleichgewicht befindet. Verwenden Sie dazu das Prinzip der virtuellen Arbeit.



(a) Verrücken Sie das System virtuell. Schneiden Sie dafür auch das Seil vom Stab frei.

(b) Stellen Sie die Ortsvektoren vom Punkt O zu den am System angreifenden Kräften auf. Wie lauten die Kräfte in vektorieller Form?

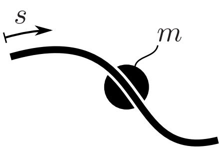
(c) Bestimmen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit m_2, so dass sich das System im statischen Gleichgewicht befindet.

(d) Prüfen Sie Ihr Ergebnis auf Plausibilität. Für welche Winkel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ existiert ein Gleichgewicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

Geg.: m_1, l, a, g

5 Kurzfragen 10 Punkte

1. Betrachtet wird eine Masse m, welche sich auf einer vorgegebenen Bahn s bewegen kann. Zeichnen Sie eine unverträgliche und eine verträgliche virtuelle Verrückung der Masse.



unverträglich verträglich

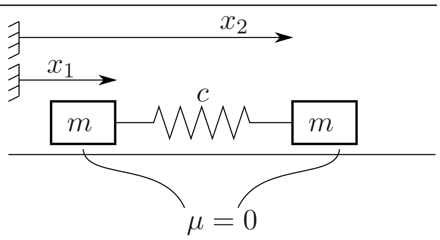
1 Punkt

2. Geben Sie die Dissipationsfunktion für den turbulenten Luftwiderstand an. Erläutern sie alle eingeführten Größen.

$D =$

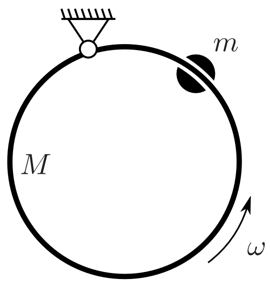
1 Punkt

3. Geben Sie für das nebenstehend skizzierte System die LAGRANGEfunktion an. Verwendung Sie die in der Skizze angegebenen Größen. Die Länge der Feder im entspannten Zustand sei s_0.



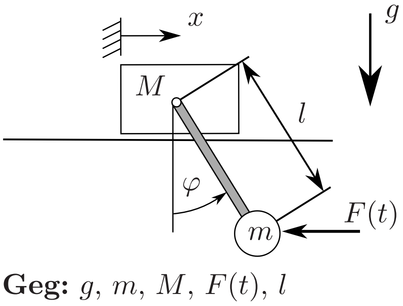
$L =$

Geg.: m, s_0, c **1 Punkt**

4. 

Auf einem Ring mit Masse M und Radius R, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω, rotiert gleitet eine Masse reibungsfrei. Zeichnen Sie in die Skizze **deutlich** die generalisierte(n) Koordinate(n) ein, die benötigt wird(werden) um das System vollständig zu beschreiben.

Geg: m, ω, R **1 Punkt**

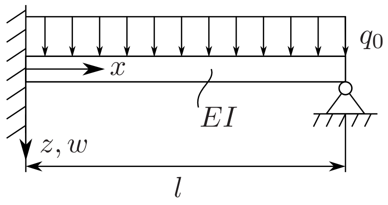
5. 

Bestimmen Sie die generalisierten Kräfte Q_φ und Q_x für das skizzierte System.

$Q_\varphi =$ $Q_x =$

Geg: g, m, M, $F(t)$, l **1 Punkt**

6. Der linearelastische Balken (Biegesteifigkeit EI) wird wie gezeigt gelagert und mit einer Streckenlast q_0 belastet. Welche der folgenden Ansätze für die Durchsenkung sind für das Verfahren von RITZ gültig?



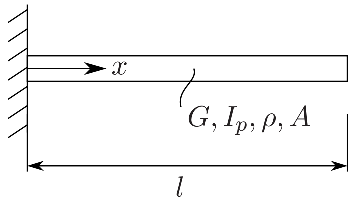
☐ $w(x) = a\,(l-x)\left(\frac{x}{l}\right)^2$ ☐ $w(x) = a\,(l-x)\left(\frac{x}{l}\right)^3$

☐ $w(x) = a\,(l-x)^2\,\frac{x}{l}$ ☐ $w(x) = a\,(l-x)^3\,\frac{x}{l}$

Geg.: q_0, l, EI **1 Punkt**

---

7. Geben Sie die LAGRANGEfunktion für einen kreisrunden, homogenen, linearelastischen Torsionsstab der Torsionsteifigkeit GI_p, der Dichte ρ und der Länge l als Funktion des Verdrehwinkels $\vartheta(x,t)$ an.

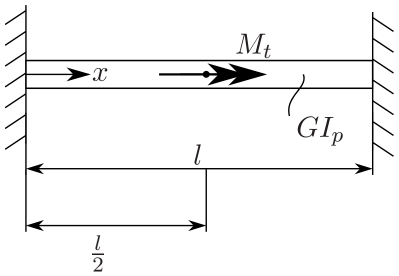


$L =$

Geg.: G, l, I_p, ρ, A **1 Punkt**

---

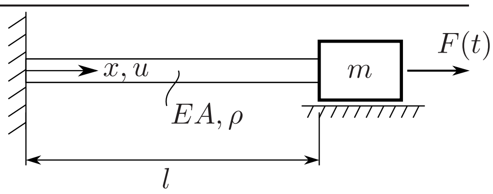
8. Der linearelastische, homogene Balken kreisrunden Querschnitts (Torsionssteifigkeit GI_p) wird wie gezeigt gelagert. Bei $x = \frac{l}{2}$ greift ein Moment M_t an. Am rechten Rand soll mittels des zweiten Satzes von CASTIGLIANO das Einspannmoment bestimmt werden. Skizzieren Sie ein geeignetes Ersatzsystem und geben Sie die Bedingung an, die benötigt wird, um das Einspannmoment zu bestimmen.



Geg.: M_t, l, GI_p **1 Punkt**

---

9. Ein linearelastischer, homogener Stab ist wie gezeigt belastet. Am rechten Rand ist eine Masse m befestigt. Welchen der folgenden Ausdrücke erhält man direkt aus der Anwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung?



☐ $\ddot{u}(x,t) = \frac{E}{\rho}u''(x,t)$ ☐ $u(0,t) = 0$

☐ $m\ddot{u}(l,t) = F(t) - EAu'(l,t)$ ☐ $EAu'(0,t) = 0$

Geg.: m, l, EA, ρ, $F(t)$ **1 Punkt**

---

10. Geben Sie den RAYLEIGH-Quotienten für eine Saite der Massenbelegung ρA und der Länge l an. Die Saite sei mit der Kraft S vorgespannt. Als Ansatzfunktion wird ein eingliedriger Ansatz der Form $w(x,t) = a(t)\psi(x)$ gewählt.

$\omega^2 =$

Geg.: S, l, ρ, A **1 Punkte**
