Prüfungsklausur: Energiemethoden der Mechanik — WiSe 2011/2012

Prof. Dr. rer. nat. Valentin Popov

Dieser Kasten ist vor der Bearbeitung der Klausur **vollständig** und **lesbar** auszufüllen!

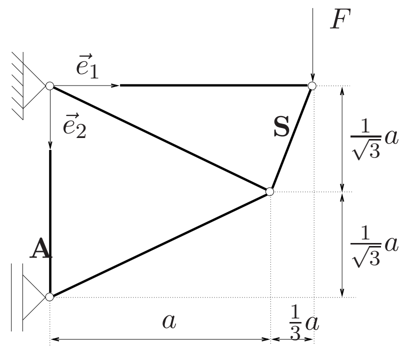
Nachname	________________	Vorname	________________
Studiengang	________________	Matrikelnummer	________________
Art der Klausur:		◯ Prüfungsklausur	◯ Übungsscheinklausur

Aufgabe	1	2	3	4	Σ 1 - 4	5	SichterIn
erreichte Punkte					/ 40	/ 10	

Die Klausur umfasst 5 Aufgaben. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 20 von 50 Punkten erreicht werden. Dabei muss jedoch Aufgabe 5 (Kurzfragen) mit mind. 5 von 10 Punkten bestanden werden. Tragen Sie die Ergebnisse des **Kurzfragenteils direkt auf dem Klausurblatt** ein (**nur diese Eintragungen werden berücksichtigt!**). Es werden **alle** Rechenaufgaben gewertet. Bitte sauber schreiben, unlesbare Lösungen werden **nicht** beachtet.

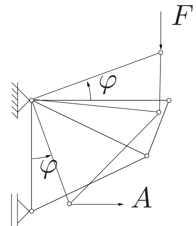
1 Bekannte Aufgabe — 8 Punkte

Das abgebildete Fachwerk aus starren Stäben wird mit der Kraft F belastet.

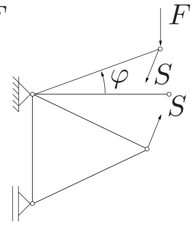


(a) Berechnen Sie mit den Basisvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ sowie mit Skizze a) die Ortsvektoren $\vec{r}_A$ und $\vec{r}_F$ zu den Angriffspunkten der Kräfte A und F. Berechnen Sie die Variationen $\delta\vec{r}_A$ und $\delta\vec{r}_F$. Berechnen Sie die Lagerkraft A mithilfe des PdvV.

(b) Notieren Sie mit Skizze b) den Ortsvektor $\vec{r}_F = \vec{r}_S$ zum gemeinsamen Angriffspunkt der Kräfte F und S. Berechnen Sie die Variationen $\delta\vec{r}_F$ und $\delta\vec{r}_S$. Berechnen Sie die Stabkraft S mithilfe des PdvV, indem Sie S als äußere Last ansehen.



Skizze a)



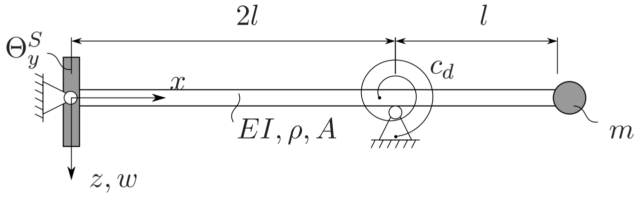
Skizze b)

Hinweis:
$\arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = 30°$
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin 30° = \frac{1}{2}$

Geg.: F, a

2 Verfahren von Rayleigh-Ritz — 3+7+2=12 Punkte

An dem gezeigten homogenen, linearelastischen Balken (Biegesteifigkeit EI, Dichte ρ, Querschnittsfläche A, Länge $3l$) ist links bei $x = 0$ eine Scheibe mit einem Massenträgheitsmoment Θ_y^S und bei $x = 3l$ eine Punktmasse der Masse m befestigt. Bei $x = 2l$ hat der Balken ein Festlager, das außerdem mit einer Drehfeder der Federsteifigkeit c_d mit dem Balken verbunden ist.



Mittels dem Verfahren von Rayleigh-Ritz soll nun eine Näherungslösung für die erste Eigenkreisfrequenz des Systems bestimmt werde. Nutzen Sie im Folgenden die Ansatzfunktion

$$w(x,t) = \left(a_0 + a_1 x + x^2\right) q(t) \qquad 0 \leq x \leq 3l\,.$$

(a) Passen Sie den Ansatz so an die geometrischen Randbedingungen an, dass Sie a_0 und a_1 eliminieren.

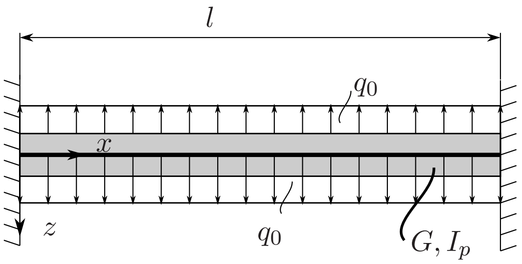
(b) Berechnen Sie die Lagrangefunktion.

(c) Bestimmen Sie nun die Näherung für die Eigenkreisfrequenz des Balkens.

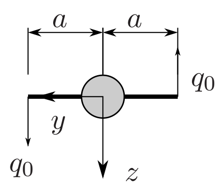
Geg.: EI, l, ρ, A, m, c_d, Θ_y^S

3 2. Satz von Castigliano 3+3+3=9 Punkte

Ein homogener, linearelastischer Torsionsstab runden Querschnitts mit polarem Flächenträgheitsmoment I_p, Schubmodul G, Dichte ρ und Länge l ist beidseitig fest eingespannt. Entlang des Stabes sind symmetrisch an beiden Seiten dünne, masselose und starre Bleche der Länge l und der Breite a so befestigt, dass an ihrem jeweiligen Ende eine konstante Streckenlast q_0 wirkt. Diese erzeugen eine konstane Momentenschüttung. Mit Hilfe des zweiten Satzes von CASTIGLIANO soll nun das Einspannmoment M_e am rechten Rand bestimmt werden. Gehen Sie wie folgt vor:



Seitenansicht



Querschnitt

(a) Skizzieren Sie ein geeignetes Ersatzsystem mit dem Sie M_e bestimmen können. Wie lautet der zweite Satz von CASTIGLIANO? Welche Bedingung gilt zudem am rechten Rand?

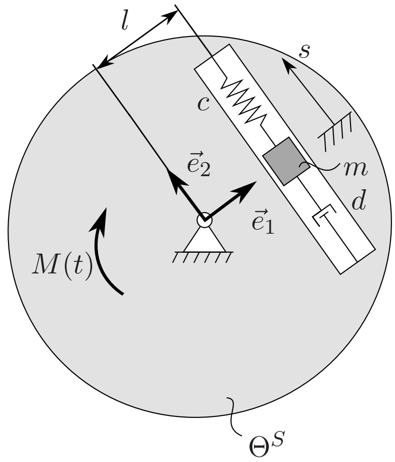
(b) Bestimmen Sie das Torsionsmoment $M_t(x)$ als Funktion von M_e.

(c) Bestimmen Sie nun mit Ihrer Bedingung aus a) das Einspannmoment.

Geg.: G, I_p, ρ, a, l, , q_0

4 Lagrangesche Gleichung 2.Art 5+2+4=11 Punkte

Eine Scheibe mit bekanntem Massenträgheitsmoment Θ^S bezüglich des Schwerpunkts wird mit einem Moment $M(t)$ angetrieben. Auf der Scheibe ist eine glatte Schiene ($\mu = 0$) im Abstand l angebracht. In der Schiene ist eine Masse m über eine Feder der Federsteifigkeit c und einen linearen viskosen Dämpfer mit Dämpfungskonstante d befestigt.
Mittels der LAGRANGEschen Gleichungen 2.Art sollen nun die Bewegungsdifferentialgleichungen für die generalisierten Koordinaten φ und s bestimmt werden. φ sei der Drehwinkel der Scheibe, der bzgl. des Basissystems $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ einen positiven Drehsinn hat. s ist die Koordinate der Masse von der Scheibe aus gesehen. Bei $s = 0$ sei die Feder entspannt.



(a) Stellen Sie die LAGRANGEfunktion auf. Nutzen Sie die eingezeichnete Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, welche fest mit der Scheibe mitrotiert zum Aufstellen des Ortsvektors der Masse.

(b) Wie lautet die Dissipationsfunktion für den Dämper dieses Systems. Ermitteln Sie zudem die generalisierten Kräfte Q_φ und Q_s.

(c) Wie lauten die LAGRANGEschen Gleichungen 2. Art? Stellen Sie diese für s und φ auf.

Hinweis:

$\dot{\vec{e}}_1 = \dot{\varphi}\,\vec{e}_2$
$\dot{\vec{e}}_2 = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_1$

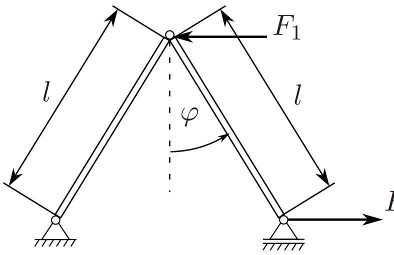
Geg.: m, l, Θ^S, c, $M(t)$, d

5 Kurzfragen 10 Punkte

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten kg, m und s an bzw. kennzeichnen Sie dimensionslose Größen mit „1“:

Komplementäre Energie W^*	
Lagrangefunktion L	
virtuelle Verrückung δx	

1 Punkt

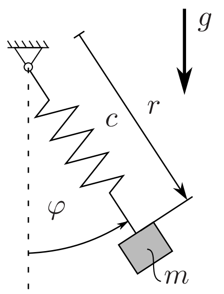
2. 

Ein Zweischlag aus starren Stäben wird wie gezeigt durch zwei Kräfte F_1 und F_2 belastet. Bestimmen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Verrückung, wie groß die Kraft F_2 sein muss, damit sich das System im Gleichgewicht befindet.

$F_2 =$

Geg.: F_1, l

1 Punkt

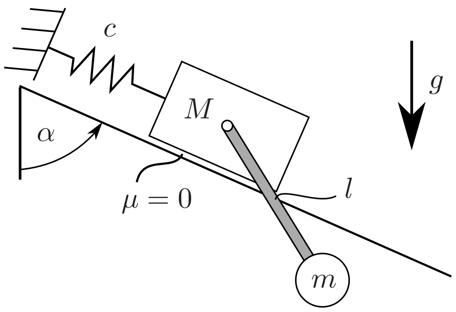
3. 

Ein Kinderspielzeug besteht aus einer Masse m, die an einer frei drehbar gelagerten Feder der Steifigkeit c hängt. Bestimmen Sie für die ebene Bewegung unter Einfluss des Schwerefeldes die Lagrangefunktion in den generalisierten Koordinaten r und φ. Die Feder sei bei $r = r_0$ entspannt.

$L =$

Geg.: m, c, r_0, g

1 Punkt

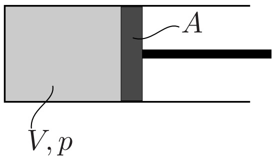
4. 

Eine Masse M, die an einer Feder hängt, gleitet reibungsfrei eine Schräge herunter. An der Masse M ist ein Pendel mit masseloser Stange und Endmasse m befestigt. Zeichnen Sie für das System ein geeignetes Set generalisierter Koordinaten **deutlich** ein, so dass mit der **Lagrangeschen Gleichung 1. Art** die Stabkraft und die Bewegungsdifferentialgleichungen bestimmt werden können.

Geg: c, l, g, M, α, $\mu = 0$

1 Punkt

5. Gegeben ist ein Zylinder mit Innendruck p, erzeugt durch den eingezeichneten Kolben. Das Volumen sei V und Querschnittsfläche des Kolbens sei A. Als generalisierte Koordinate soll das Volumen gewählt werden, $q = V$. Wie lautet dann die zugehörige generalisierte Kraft Q_V bei der Bewegung des Kolbens?

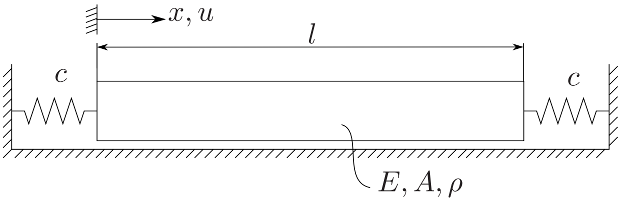


$Q_V =$

Geg.: p, V, A

1 Punkt

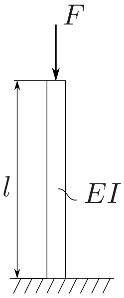
6. Geben Sie die LAGRANGEfunktion für den gezeigten homogenen, linearelastischen **Dehnstab** an. Dieser ist an beiden Enden durch zwei Federn der Steifigkeit c befestigt. Diese seien in der Ausgangslage entspannt.



$L =$

Geg.: E, A, l, ρ, c **1 Punkt**

---

7. 

Luca und Ulli haben mit dem Verfahren von RAYLEIGH-RITZ eine Näherungslösung für die kritische Last des gezeigte Systems bestimmt.

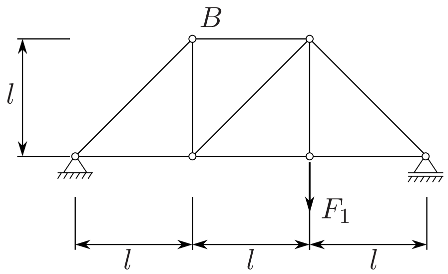
$$F_{k,Luca} = 6\frac{EI}{l^2}$$
$$F_{k,Ulli} = 5,3\frac{EI}{l^2}$$

Wer von beiden hat die bessere Lösung bestimmt? **Begründen Sie ihre Antwort.**

Geg.: EI, l **1 Punkt**

---

8. Das gezeigte ideale Fachwerk wird mit der Kraft F_1 belastet. Alle Stäbe seien homogen und haben die Dehnsteifigkeit EA. Es soll mittels des zweiten Satzes von CASTIGLIANO die Verschiebung des Punktes B in vertikaler Richtung bestimmt werden. Skizzieren Sie ein geeignetes Ersatzsystem und geben Sie die Bedingung an, die benötigt wird, um die Verschiebung zu bestimmen.



Geg.: F_1, l, EA **1 Punkt**

---

9. Geben Sie für ein mechanisches System mit einem Freiheitsgrad und der potentiellen Energie $U = 2mgl\cos\varphi$ die Gleichgewichtslagen im Bereich $0 \leq \varphi < 2\pi$ an!

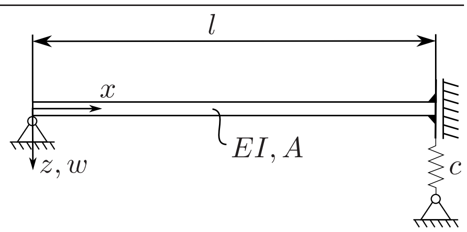
stabile Gleichgewichtslage: $\varphi_1 =$

instabile Gleichgewichtslage: $\varphi_2 =$

Geg.: m, g, l **1 Punkt**

---

10. Für den gezeigten homogenen, linearelastischen Balken sollen die **dynamischen Randbedingungen** bestimmt werden. Welche Methoden können Sie anwenden um diese zu bestimmen?



- ☐ Das Prinzip der kleinsten Wirkung
- ☐ Freischneiden der Enden und Aufstellen von (dynamischen) Kräftegleichgewichten
- ☐ Eine Person fragen, die weiß wie dynamische Randbedingungen bestimmt werden

Geg.: EI, A, l, c **1 Punkte**