Aufgabe 1

(a) Die Ortsvektoren $\vec{r}_A$ und $\vec{r}_A$ vom drehbaren Festlager zu den Kraftanfgriffspunkten lauten:

$$\vec{r}_A = \frac{2}{\sqrt{3}} a \left(\sin(\varphi)\vec{e}_1 + \cos(\varphi)\vec{e}_2\right)$$
$$\vec{r}_F = \frac{4}{3} a \left(\cos(\varphi)\vec{e}_1 - \sin(\varphi)\vec{e}_2\right)$$

$\boxed{1}$ für beide

- Die Variation ergibt sich dann zu:

$$\delta\vec{r}_A = \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial \varphi}\delta\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}} a \left(\cos(\varphi)\vec{e}_1 - \sin(\varphi)\vec{e}_2\right)\delta\varphi$$
$$\delta\vec{r}_F = \frac{\partial \vec{r}_F}{\partial \varphi}\delta\varphi = \frac{4}{3} a \left(-\sin(\varphi)\vec{e}_1 - \cos(\varphi)\vec{e}_2\right)\delta\varphi$$

$\boxed{1}$ für beide

- Berechnung der Lagerkraft A, wie folgt:

$$\begin{aligned}\delta W &= A\vec{e}_1 \cdot \delta\vec{r}_A|_{\varphi=0} + F\vec{e}_2 \cdot \delta\vec{r}_F|_{\varphi=0} \quad \boxed{1}\\ &= A\vec{e}_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} a \left(\cos(0)\vec{e}_1 - \sin(0)\vec{e}_2\right)\delta\varphi \\ &\quad + F\vec{e}_2 \cdot \frac{4}{3} a \left(-\sin(0)\vec{e}_1 - \cos(0)\vec{e}_2\right)\delta\varphi \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} aA - \frac{4}{3} aF\right)\delta\varphi = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}F$$
$$A = \frac{2}{3}\sqrt{3}F = \frac{2}{\sqrt{3}}F \quad \boxed{1}$$

(b) Gesucht ist der Ortsvektor $\vec{r}_F = \vec{r}_S$ zum gemeinsamen Angriffspunkt der Kräfte F und S.

$$\vec{r}_F = \frac{4}{3} a \left(\cos(\varphi)\vec{e}_1 - \sin(\varphi)\vec{e}_2\right)$$
$$\vec{r}_F = \vec{r}_S$$

- Berechnung der Variationen $\delta\vec{r}_F$ und $\delta\vec{r}_S$

$$\delta\vec{r}_F = \delta\vec{r}_S = \frac{4}{3} a \left(-\sin(\varphi)\vec{e}_1 - \cos(\varphi)\vec{e}_2\right)\delta\varphi \quad \boxed{1} \text{ für } \vec{r}_i \text{ und } \delta\vec{r}_i$$

- Bestimmung der Stabkraft S mithilfe des PdvV:

Die Kraft S liegt in Richtung eines Vektors $\vec{e}_S$. Dieser Vektor läßt sich durch $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ folgendermaßen ausdrücken.

$$\vec{e}_S = \cos(\alpha)\vec{e}_2 - \sin(\alpha)\vec{e}_1$$

Da $\alpha = 30°$ wegen $\tan\alpha = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ergibt sich für $\vec{e}_S$:

$$\vec{e}_S = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2 \quad \boxed{1}$$

Damit ist S:

$$\vec{S} = S\vec{e}_S = S\left(-\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2\right) \quad \boxed{1}$$
$$\begin{aligned}\delta W &= F\vec{e}_2 \cdot \delta\vec{r}_F|_{\varphi=0} + \vec{S}\cdot\delta\vec{r}_S|_{\varphi=0} \\ &= -\frac{4}{3}aF - \frac{4}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}S = 0\end{aligned}$$
$$\Rightarrow \quad S = -\frac{2}{\sqrt{3}}F \quad \boxed{1}$$

Aufgabe 4

(a) LAGRANGEfunktion:

$$L = K - U \tag{1}$$

mit:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2}\Theta^S\dot{\varphi}^2 \quad \boxed{1} \qquad U = \frac{1}{2}cs^2 \quad \boxed{1} \tag{2}$$

für den Ortsvektor ergibt sich:

$$\vec{r} = l\vec{e}_1 + s\vec{e}_2 \quad \boxed{1} \tag{3}$$
$$\dot{\vec{r}} = l\dot{\varphi}\vec{e}_2 + \dot{s}\vec{e}_2 - s\dot{\varphi}\vec{e}_1 \tag{4}$$
$$\dot{\vec{r}}^2 = (l\dot{\varphi} + \dot{s})^2 + s^2\dot{\varphi}^2 \quad \boxed{1} \tag{5}$$

Damit ergibt sich:

$$L = \frac{1}{2}\Theta^S\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{s} + \dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{1}{2}cs^2 \quad \boxed{1} \tag{6}$$

(b) Die Dissipationsfunktion lautet:

$$D = \frac{1}{2}d\dot{s}^2 \quad \boxed{1} \tag{7}$$

Für die generalisiserten Kräfte stellt man die virtuelle Arbeit auf:

$$\delta W = -M(t)\delta\varphi \tag{8}$$
$$\Rightarrow Q_\varphi = -M(t) \quad Q_s = 0 \quad \boxed{1} \tag{9}$$

(c) Differentiationen für φ:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \Theta^S\dot{\varphi} + m\left(l^2\dot{\varphi} + l\dot{s} + s^2\dot{\varphi}\right) \tag{10}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \Theta^S\ddot{\varphi} + m\left(l^2\ddot{\varphi} + l\ddot{s} + 2\dot{s}s\dot{\varphi} + s^2\ddot{\varphi}\right) \tag{11}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \quad \boxed{1} \tag{12}$$
$$\Theta^S\ddot{\varphi} + m\left(l^2\ddot{\varphi} + l\ddot{s} + 2\dot{s}s\dot{\varphi} + s^2\ddot{\varphi}\right) = -M(t) \quad \boxed{1} \tag{13}$$

Differentiationen für s:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = m(l\dot{\varphi} + \dot{x}) \tag{14}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = m(l\ddot{\varphi} + \ddot{x}) \tag{15}$$
$$\frac{\partial L}{\partial s} = -cs + ms\dot{\varphi}^2 \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = d\dot{s} \quad \boxed{1} \tag{16}$$
$$m(l\ddot{\varphi} + \ddot{s} - s\dot{\varphi}^2) + cs + d\dot{s} = 0 \quad \boxed{1} \tag{17}$$

Aufgabe 2

(a) Die geometrischen Randbedingungen lauten:

$$w(0,t) = 0 \tag{18}$$

$$w(2l,t) = 0\,. \quad \boxed{1} \tag{19}$$

Damit ergibt sich für die Konstanten

$$a_0 = 0 \tag{20}$$

$$a_1 = -2l\,. \quad \boxed{1} \tag{21}$$

und für die Ansatzfunktion schließlich

$$w(x,t) = x(x-2l)q(t)\,. \quad \boxed{1} \tag{22}$$

(b) Benötigte Ableitungen:

$$w'(x,t) = 2(l-x)q(t) \tag{23}$$

$$w''(x,t) = -2q(t) \tag{24}$$

$$\dot{w}(x,t) = x(x-2l)\dot{q}(t) \tag{25}$$

$$\dot{w}'(x,t) = 2(x-l)\dot{q}(t) \boxed{1} \text{ für alle} \tag{26}$$

$$L = K - U \tag{27}$$

$$K = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{3l} \rho A \dot{w}(x,t)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} m \dot{w}(3l,t)^2}_{\boxed{1}} + \underbrace{\frac{1}{2}\Theta_y^S \dot{w}'(0,t)^2}_{\boxed{1}} \tag{28}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\rho A \int_0^{3l} x^2(x(-2l)\mathrm{d}x + 2\Theta_y^S l^2 + \frac{9}{2} m l^4\right] \dot{q}(t)^2 \tag{29}$$

$$\int_0^{3l} x^2(x-2l)\mathrm{d}x = \int_0^{3l} (x^4 - 4lx^3 - 4l^2x^2)\mathrm{d}x \tag{30}$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}lx^4 + \frac{4}{3}l^2x^3\right]_0^{3l} \tag{31}$$

$$= l^5\left(\frac{243}{5} - 81 + 36\right) = \frac{18}{5}l^5\,. \quad \boxed{1} \tag{32}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{3l} EIw''(x,t)^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}c_d w'(2l,x)^2 \quad \boxed{1} \tag{33}$$

$$= \frac{1}{2}EI\int_0^{3l} 4q(t)^2\mathrm{d}x + 2l^2 c_d q(t)^2 \tag{34}$$

$$= 6EIq(t)^2 + 2l^2 c_d q(t)^2 \quad \boxed{1} \tag{35}$$

Damit folgt für L:

$$L = \left(\frac{9}{5}\rho A l^5 + \Theta_y^S 2l^2 + \frac{9}{2}ml^4\right)\dot{q}(t)^2 \tag{36}$$

$$-\left(6EIl + 2l^2 c_d\right) q(t)^2 \quad \boxed{1}$$

(c) Anwenden des Lagrangeformalismus:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{37}$$

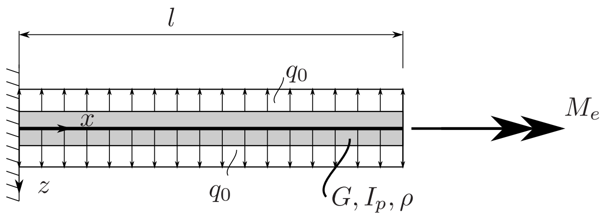
$$\left(\frac{9}{5}\rho A l^5 + 2\Theta_y^S l^2 + \frac{9}{2}ml^4\right)\ddot{q}(t) - \left(6EIl + 2l^2 c_d\right) q(t) = 0 \quad \boxed{1} \tag{38}$$

Damit ergibt sich für ω^2

$$\omega^2 = \frac{6EI + 2c_d l}{\frac{9}{5}\rho A l^4 + 2\Theta_y^S l + \frac{9}{2}ml^3} \quad \boxed{1} \tag{39}$$

Aufgabe 3

(a) Ersatzsystem $\boxed{1}$:



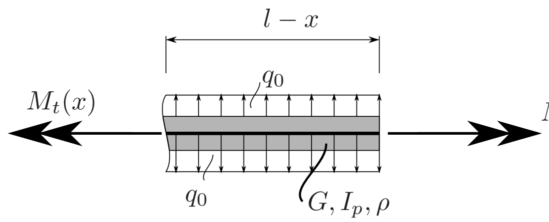
Zweiter Satz von Castigliano:

$$\frac{\partial W^*}{\partial Q_i} = q_i \quad \boxed{1} \tag{40}$$

$$\frac{\partial W}{\partial M_e} = 0 \quad \boxed{1} \tag{41}$$

$$\tag{42}$$

(b) Freischnitt $\boxed{1}$:



$$m(x) = 2q_0 a \quad \boxed{1} \tag{43}$$

$$M_t(x) = M_e + 2q_0(l-x)a \quad \boxed{1} \tag{44}$$

(c)

$$W = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_t(x)^2}{GI_p}\mathrm{d}x \quad \boxed{1} \tag{45}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial M_e} = \frac{1}{GI_p}\int_0^l M_t(x)\frac{\partial M_t(x,M_e)}{\partial M_e}\mathrm{d}x \quad \boxed{1} \tag{46}$$

$$= \frac{1}{GI_p}\int_0^l \left(M_e + 2q_0 a(l-x)\right)\mathrm{d}x \tag{47}$$

$$= \frac{1}{GI_p}\left[M_e l + 6q_0 a l^2 - \frac{2q_0 a l^2}{2}\right] \tag{48}$$

Damit folgt für das Einspannmoment:

$$M_e = -q_0 a l \boxed{1} \tag{49}$$