Aufgabe 1

1. Überprüfen auf Erfüllung der Randbedingungen. $\boxed{1}$

$$w(x=0,t)=0 \quad (1)$$
$$w(x=l,t)=0 \quad (2)$$
$$w'(x=0,t)=0 \quad (3)$$

Sei $\varphi(x) := x^2(l-x)^2$ der ortsabhängige Faktor der Ansatzfunktion w.

2. Substitution $\eta = \frac{x}{l}$

$$\varphi(\eta) = l^4\left(\frac{x}{l}\right)^2\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 = l^4\left(\eta^4 - 2\eta^3 + \eta^2\right) \quad \boxed{1} \quad (4)$$
$$\varphi(x) = x^2l^2 - 2x^3l + x^4 \quad (5)$$

3. Rayleigh-Quotient für Biegung

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^1 EI\varphi''^2(\eta)d\eta}{\int_0^1 \rho A\varphi^2(\eta)d\eta} = \frac{\int_0^l EI\varphi''^2(x)dx}{\int_0^l \rho A\varphi^2(x)dx} =: \frac{Z}{N}\,\frac{EI}{\rho A}. \quad \boxed{1} \quad (6)$$

Mit

$$\varphi''(\eta) = l^2(12\,\eta\,(\eta-1)+2) \quad \boxed{1} \quad (7)$$
$$\varphi''(x) = 2(l^2 - 6xl + 6x^2) \quad (8)$$

sowie

$$Z = \int_0^1 \varphi''^2(\eta)d\eta = \int_0^l \varphi''^2(x)dx \quad (9)$$
$$= 144l^4\int_0^1\left(\eta^4 - 2\eta^2 + \frac{4}{3}\eta^2 - \frac{1}{3}\eta + \frac{1}{36}\right)d\eta \quad \boxed{1} \quad (10)$$
$$= 144\,l^5\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\right) = \frac{4}{5}\,l^5 \quad \boxed{1} \quad (11)$$
$$= 4\int_0^l\left(l^4 - 12xl^3 + 48x^2l^2 - 72x^3l + 36x^4\right)dx \quad (12)$$
$$= 4l^5\left(1 - 6 + 16 - 18 + \frac{36}{5}\right) = \frac{4}{5}\,l^5 \quad (13)$$

und

$$N = \int_0^1 \varphi^2(\eta)d\eta = \int_0^l \varphi^2(x)dx \quad (14)$$
$$= l^8\int_0^1\left(\eta^8 - 4\eta^7 + 6\eta^6 - 4\eta^5 + \eta^4\right)d\eta \quad (15)$$
$$= l^9\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2} + \frac{6}{7} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{630}\,l^9 \quad \boxed{1} \quad (16)$$
$$= \int_0^l x^4(l-x)^4dx = \frac{1}{630}l^9 \quad (17)$$

folgt daraus:

$$\omega_1 = \frac{2}{l^2}\sqrt{126\frac{EI}{\rho A}} = \frac{22,45}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \boxed{1} \quad (18)$$

4. Warum große Abweichung von der „exakten“ Lösung?

Die Ansatzfuktion liefert für die Stelle

$$x = l\ :\ \omega'(x=l) = 0,$$

dies gilt jedoch nur für den auch rechts eingespannten Balken. Die vorgegebene Ansatzfunktion ist offenbar für das konkrete Problem weniger gut geeignet. $\boxed{1}$

Aufgabe 2

(a) Aus den Gleichgewichtsbedingunen folgt:

$$M_I(x) = \frac{F}{3}x \quad \boxed{1} \quad (19)$$
$$M_{II}(x) = \frac{2}{3}F(3l-x) \quad \boxed{1} \quad (20)$$

Dabei sind die Lagerkräfte in negative z-Richtung angenommen worden.

(b) Die Formänderungsergänzungsenergie für diesen Balken ist:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^{3l}\frac{M(x)^2}{EI}\,dx \quad (21)$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2l}\frac{F^2x^2}{9EI}\,dx + \frac{1}{2}\int_{2l}^{3l}\frac{4F^2}{9EI}(9l^2 - 6lx + x^2)\,dx \quad \boxed{2} \quad (22)$$
$$= \frac{1}{18}\frac{F^2}{EI}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2l} + \frac{2}{9}\frac{F^2}{EI}\left[9l^2x - 3lx^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_{2l}^{3l} \quad (23)$$
$$= \frac{6}{27}\frac{F^2l^3}{EI} \quad \boxed{1} \quad (24)$$

Für die Durchbiegung bei $x = 2l$ gilt:

$$w(x=2l) = \frac{\partial W}{\partial F} \quad \boxed{1} \quad (25)$$
$$= \frac{12}{27}\frac{Fl^3}{EI} \quad \boxed{1} \quad (26)$$

Aufgabe 3

(a) Das System besitzt eigentlich nur einen Freiheitsrad, daher gilt:

$$g = x_p - y = 0 \quad \boxed{1} \quad (27)$$

(b)

$$L = K - U \quad (28)$$
$$K = \frac{1}{2}\Theta^A\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \quad \boxed{1} \quad (29)$$
$$U = \frac{1}{2}cx_p^2 - mgy \quad \boxed{1} \quad (30)$$

Mit

$$\Theta^A = \Theta^S + m4R^2 = 6mR^2 \quad (31)$$

$\boxed{1}$ Entweder für Steiner oder direkt in K (32)

$$3R\varphi = x_p \quad \boxed{1} \quad (33)$$

Damit folgt für die kinetische Energie:

$$K = \frac{1}{3}m\dot{x}_p^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \quad (34)$$
$$L = \frac{1}{3}m\dot{x}_p^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}cx^2 + mgy \quad \boxed{1} \quad (35)$$

(c) Für die Dissipationsfunktion ergibt sich:

$$D = \frac{1}{2}b(R\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{18}b\dot{x}_p^2 \quad \boxed{1} \quad (36)$$

Für die Generalisierte Kraft gilt:

$$Q_x = \frac{M_0}{3R} \quad \boxed{1} \tag{37}$$
$$Q_y = 0 \tag{38}$$

(d) Die LAGRANGEsche Gleichung 1.Art lautet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i} \quad \boxed{1} \tag{39}$$

Für x_p ergibt sich dann:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_p}\right) = \frac{2}{3} m\ddot{x}_p \qquad \frac{\partial L}{\partial x_p} = -cx_p \tag{40}$$
$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_p} = \frac{1}{9} b\dot{x}_p \qquad \frac{\partial g}{\partial x_p} = 1 \quad \boxed{1} \tag{41}$$
$$\frac{2}{3} m\ddot{x}_p + cx_p + \frac{1}{9} b\dot{x}_p = \lambda + \frac{M_0}{3R} \quad \boxed{1} \tag{42}$$

Für y ergibt sich dann:

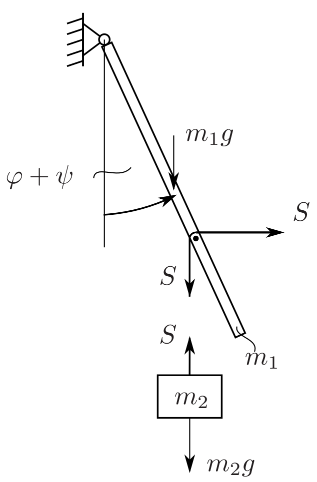
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = mg \tag{43}$$
$$\frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -1 \quad \boxed{1} \tag{44}$$
$$m\ddot{y} - mg = -\lambda \quad \boxed{1} \tag{45}$$

(e) Für die Seilkraft und die Bewegungsgleichung ergibt sich mit $\ddot{x}_p = \ddot{y}$

$$S = \lambda = -m\ddot{x}_p + mg \tag{46}$$
$$\frac{5}{3} m\ddot{x}_p + cx_p - mg + \frac{1}{9} b\dot{x}_p = \frac{M_0}{3R} \quad \boxed{1} \tag{47}$$

Aufgabe 4

(a)



$\boxed{1}$

(b)

$$\vec{r}_1 = \frac{l}{2}\cos(\varphi+\psi)\vec{e}_y + \frac{l}{2}\sin(\varphi+\psi)\vec{e}_x \tag{48}$$
$$\vec{r}_2 = \frac{2}{3} l\cos(\varphi+\psi)\vec{e}_y + \frac{2}{3} l\sin(\varphi+\psi)\vec{e}_x \tag{49}$$

$\boxed{1}$ für beide

Mit $S = m_2 g$ $\boxed{1}$ ergibt sich

$$\vec{F}_1 = m_1 g\vec{e}_y \tag{50}$$
$$\vec{F}_2 = m_2 g\vec{e}_y \tag{51}$$
$$\vec{F}_3 = m_2 g\vec{e}_x \tag{52}$$

$\boxed{1}$ für alle drei

(c) Es gilt:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i \stackrel{!}{=} 0 \quad \boxed{1} \tag{53}$$

Für die virtuellen Verrückungen an der Stelle $\psi = 0$ gilt:

$$\delta\vec{r}_1 = \frac{l}{2}\delta\psi\left[-\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\varphi\vec{e}_x\right] \tag{54}$$
$$\delta\vec{r}_2 = \frac{2}{3} l\delta\psi\left[-\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\varphi\vec{e}_x\right] \tag{55}$$

$\boxed{1}$ für beide

Damit ergibt sich für die virtuelle Arbeit:

$$\delta W = \delta\psi\left[-m_1 g\frac{l}{2}\sin\varphi + \frac{2}{3} l(m_2 g\cos\varphi - m_2 g\sin\varphi)\right] = 0 \quad \boxed{1} \tag{56}$$

Für die Masse m_2 folgt dann:

$$m_2 = \frac{3}{4}\frac{m_1\sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} \quad \boxed{1} \tag{57}$$

(d) Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ tritt der Grenzfall ein. $\boxed{1}$.
Ist $\varphi < \frac{\pi}{4}$ hat das Seil eine rückstellentde Wirkung ein Gleichgewicht existiert. Oder alternativ ausgedrückt ist die Masse m_2 nur dann positiv. $\boxed{1}$