Berlin, 25. Juli 2018

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Klausur Grundlagen der Algorithmik

(Niedermeier/Bentert, Sommersemester 2018)

Aufgabe Nr.:	1	2	3	4	5	**Summe**
Punktzahl:	10	8	10	10	12	50
Davon erreicht:						

Einlesezeit:	15 Minuten
Bearbeitungszeit:	60 Minuten
Max. Punktezahl:	50 Punkte

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber in der Farbe Schwarz oder Blau.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Vor- und Nachnamen sowie Matrikelnummer.
- **Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, so sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**
- Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: **Modellieren mit Maximum Flow** (10 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Problemstellung.

Eine Universität hat m Rechenzentren $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\}$. Jedes Rechenzentrum R_i hat z_i freie Zeitslots um Berechnungen für Forschungsprojekte durchzuführen. Es gibt n Forschungsgruppen $F_1, F_2, \ldots, F_n$, die derzeit jeweils $d_1, d_2, \ldots, d_n$ Forschungsprojekte haben, die jeweils einen Zeitslot auf einem Rechenzentrum benötigen. Jede Forschungsgruppe F_i hat Zugriff auf eine Teilmenge $A_i \subseteq \mathcal{R}$ aller Rechenzentren.

Wie sollten die Forschungsprojekte auf die Rechenzentren verteilt werden, sodass möglichst viele Forschungsprojekte erfolgreich abgeschlossen werden können und jede Forschungsgruppe nur Rechenzentren zugeteilt bekommt, auf die sie auch Zugriff hat? Modellieren Sie dieses Problem als ein MAXIMUM FLOW-Problem, sodass die Anzahl der Knoten und die Anzahl der Kanten im Flussnetzwerk polynomiell in $n + m$ ist. Geben Sie hierfür die Knoten, Kanten und Kantenkapazitäten Ihres Flussnetzwerks an und beschreiben Sie, wie die Antwort bestimmt werden kann.

Aufgabe 2: **Eigenschaften von Netzwerkflüssen** (8 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Gegeben seien ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, Kantenkapazitäten $c\colon E \to \{2, 3, 5, 7\}$ und zwei Knoten $s, t \in V$. Dann ist der größtmögliche s-t-Fluss restfrei durch $2, 3, 5$ oder 7 teilbar.

Aufgabe 3: **Lineares Programmieren** (10 Punkte)

Geben Sie für das folgende Problem eine Formulierung als ganzzahliges lineares Programm (ILP) an (ohne Begründung).

Definieren Sie dazu die verwendeten Variablen, alle Nebenbedingungen sowie die Zielfunktion und geben Sie an, ob diese minimiert oder maximiert wird.

Dominating Set
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ aus n Knoten und m Kanten.
Aufgabe: Finden Sie eine kleinstmögliche Menge D von Knoten in G, sodass jeder Knoten mindestens einen Nachbarn in D hat oder in D enthalten ist (oder beides).

Vorschlag zur Notation: Die Nachbarschaft eines Knoten v wird häufig mit $N(v)$ beschrieben. Soll v selbst in der Nachbarschaft enthalten sein, so wird stattdessen $N[v]$ geschrieben.

Aufgabe 4: **Datenreduktion** (10 Punkte)

Das NP-vollständige 3-Coloring-Problem ist wie folgt definiert:

3-Coloring
Eingabe: Ein ungerichteter Graph G.
Frage: Können alle Knoten in G so mit drei Farben gefärbt werden, dass keine zwei Knoten mit der gleichen Farbe durch eine Kante verbunden sind?

Nachfolgend sind einige (vermeintlich korrekte) Datenreduktionsregeln für 3-Coloring angegeben. Eine Datenreduktionsregel für 3-Coloring ist *korrekt*, wenn der Eingabegraph G genau dann dreifärbar ist, wenn der Graph G', der aus der Anwendung der Datenreduktionsregel auf G resultiert, dreifärbar ist.

Welche der vorgeschlagenen Regeln sind korrekt? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) Gibt es in G einen Knoten v mit höchstens zwei Nachbarn, so lösche v. (3 P)

(b) Gibt es in G zwei Knoten u und v, die durch eine Kante verbunden sind und die ansonsten genau die gleichen Nachbarn haben (d.h. $N[u] = N[v]$), so lösche v. (3 P)

(c) Gibt es in G zwei Knoten u und v, die nicht durch eine Kante verbunden sind und die genau die gleichen Nachbarn haben (d.h. $N(u) = N(v)$), so lösche v. (4 P)

Erinnerung: Die offene Nachbarschaft $N(v)$ eines Knoten v ist die Menge aller Nachbarn von v (ohne v) und die geschlossene Nachbarschaft $N[v]$ von v ist $N(v) \cup \{v\}$.

Aufgabe 5: **Spezialfälle NP-schwerer Probleme** (12 Punkte)

Das NP-schwere Problem Independent Set ist wie folgt definiert.

Independent Set
Eingabe: Ein ungerichteter Graph G und eine natürliche Zahl $k > 0$.
Frage: Gibt es k Knoten in G, sodass keine Kante zwischen zwei dieser k Knoten existiert?

Argumentieren Sie, wie die folgenden drei Varianten von Independent Set in polynomieller Zeit gelöst werden können.

(a) Der Graph G ist ein „Clustergraph", d.h. jede Zusammenhangskomponente ist eine Clique. (4 P)

(b) Jeder Knoten ist mit allen bis auf maximal drei andere durch eine Kante verbunden, d.h. der minimale Knotengrad in G ist mindestens $n - 4$, wobei n die Anzahl der Knoten in G ist. (4 P)

(c) Jede Zusammenhangskomponente besteht aus maximal 13 Knoten. (4 P)

Hinweise: Eine Clique ist ein Graph, in dem alle Knoten paarweise durch eine Kante verbunden sind.

Eine Zusammenhangskomponente besteht aus einem Knoten v, allen Knoten, die von v aus über Pfade erreicht werden können und allen Kanten in G zwischen diesen Knoten. Die Zusammenhangskomponenten eines Graphen können allesamt in $O(n+m)$ Zeit berechnet werden.

Überlegen Sie sich, wie viele Zusammenhangskomponenten es in einem Graph höchstens geben kann.