Technische Universität Berlin
Forschungsschwerpunkt
Technologien der Mikroperipherik

Grundlagen der Elektrotechnik

Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. **Herbert Reichl**

WS 07/08

Klausuraufgabenkatalog „Grundlagen der Elektrotechnik"

Hinweise zur Bearbeitung der Aufgaben.

Konstanten

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

Formeln (Bronstein)

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a}\frac{1}{ax+b} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

a, b und C sind Konstanten.

1. Aufgabe

Gegeben sind eine positive Punktladung Q im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems (x, y) und vier Punktladungen Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4, die an den Ecken eines Quadrats der Seitenlänge $a\sqrt{2}$ liegen (Abb.1). Für die Punkladungen gilt: $Q_1 = Q_4 = -Q_2 = -Q_3 = Q$. Die Ladungsanordnung befindet sich in der Luft.

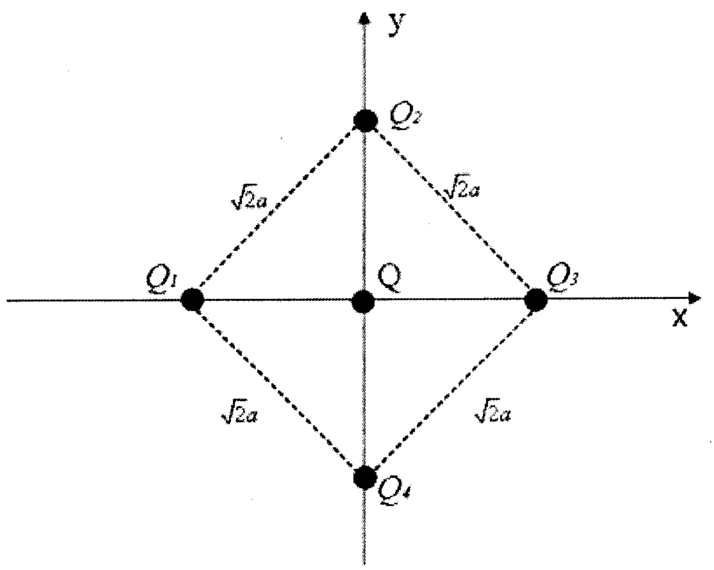


Abbildung 1

a) Welche Kraft $\vec{F}$ wirkt auf die Punktladung Q im Koordinatenursprung?

Lösungsansatz: Coulomb'sches Gesetz:

allg.: $\vec{F}_{Q,ges} = Q \sum_{i=1}^{4} \vec{E}_i = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{4} Q_i \frac{\vec{r}_{i,0}}{r_{i,0}^3}$

$Q_1 \rightarrow \vec{F}_{1,0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q Q_1}{a^2} \vec{e}_x = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \vec{e}_x$

$Q_2 \rightarrow \vec{F}_{2,0} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} (+\vec{e}_y)$

$Q_3 \rightarrow \vec{F}_{3,0} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} (+\vec{e}_x)$

$Q_4 \rightarrow \vec{F}_{4,0} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \vec{e}_y$

$\vec{F}_{Q,ges} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_{i,0}$

$$\underline{\underline{\vec{F}_{Q,ges} = \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 a^2} (\vec{e}_x + \vec{e}_y)}}$$

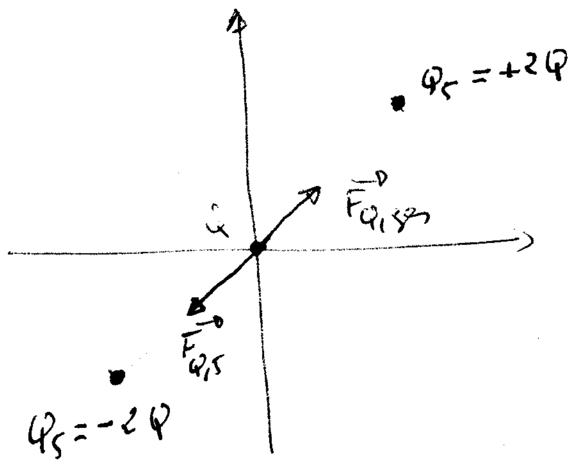
b) Welche Bedingungen müsste eine weitere Punktladung Q_5, die sich im Abstand a zur Punktladung Q befindet, erfüllen, wenn die auf die Ladung Q im Koordinatenursprung wirkende Gesamtkraft verschwinden soll?

Bedingung: Kräftegleichgewicht: $\vec{F}_{Q,5} = -\vec{F}_{Q,ges}$

$\Downarrow$

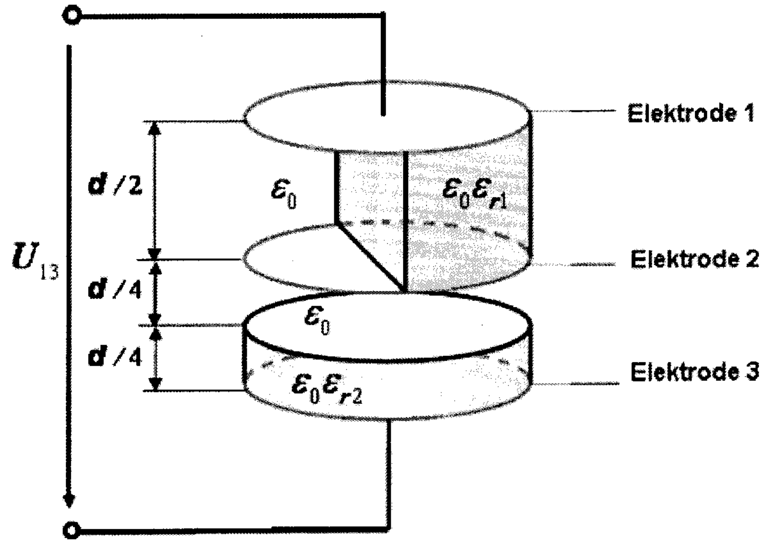
$|\vec{F}_{Q,5}| = |\vec{F}_{Q,ges}|$ & $\vec{F}_{Q,5} \uparrow\downarrow \vec{F}_{Q,ges}$

$$\left.\begin{aligned} |\vec{F}_{Q,ges}| &= \sqrt{2}\,\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 a^2} \\ |\vec{F}_{Q,5}| &= \sqrt{2}\sqrt{\left[\frac{Q_5 Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right]^2} \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{Q_5 = \pm 2Q}}$$



2. Aufgabe

Die Zwischenräume der drei idealleitenden, kreisförmigen und unendlich dünnen Elektroden mit dem Radius r sind wie in der unteren Abbildung dargestellt mit Dielektrika gefüllt.



Gegebene Größen:

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

$\varepsilon_{r1} = 3$

$\varepsilon_{r2} = 12$

$r = 5\,mm$

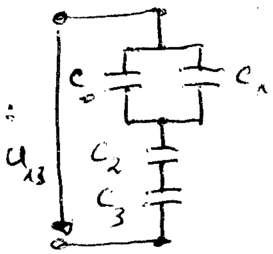
$d = 1\,mm$

Abbildung 2

Hinweis: Alle Felder verlaufen senkrecht zu den Elektroden, Streufelder treten nicht auf.

a) Berechnen Sie die Gesamtkapazität dieser Anordnung?

ESB:



Ansatz: $C_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_i} \frac{A_i}{d_i}$

$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A_0}{d_0} = \varepsilon_0 \frac{(\pi r^2)/2}{d/2} = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d}$

$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \frac{A_1}{d_1} = 3C_0$

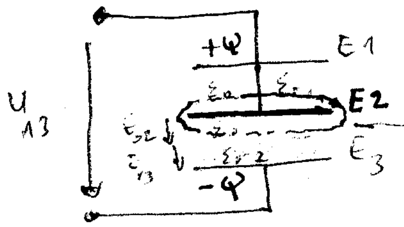
$C_2 = 4C_0$, $C_3 = 48C_0$

$C_{ges} = [C_0 \| C_1]$ Reihe $[C_2$ Reihe $C_3]$

$= \frac{1}{\frac{1}{C_0+C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{48}{25} C_0$

$\underline{\underline{C_{ges} = 1{,}335\,pF}}$

b) Welche Ladung hat die Elektrode 2.



$$Q_2 = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{A} = +Q - Q = \underline{\underline{0\ As}}$$

c) Das potential der Elektrode 1 beträgt $\varphi_1 = 1\ \mathrm{V}$, das der Elektroden 3 beträgt $\varphi_3 = 0\ \mathrm{V}$.

Berechnen Sie das Potential φ_2 der Elektrode 2.

① $$\left.\begin{array}{l} U_{13} = 1V = \varphi_1 - \varphi_3 \\ \varphi_2 = U_{23} = \varphi_2 - \varphi_3 \end{array}\right\} U_{23} = \frac{Q}{C} = \frac{C_{ges} U_{13}}{C_{23}} \quad \text{mit} \quad C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = 2{,}516\,pF$$

$$\varphi_2 = U_{23} = \underline{\underline{0{,}518\,V}}$$

② alternativ $$D = \frac{Q}{A}, \; Q = C_{ges} U \Rightarrow D = \frac{C_{ges} U}{A} \quad \text{und} \quad E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$\varphi_2 = U_{23} = (E_{02} + E_{r3}) \frac{d}{4} \qquad E_{02} = \frac{D}{\varepsilon_0} \qquad E_{r3} = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}$$

$$\Rightarrow \varphi_2 = \frac{d}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}} + 1\right) \frac{C_{ges} U_{13}}{\varepsilon_0 A} = \frac{13}{25} U = \underline{\underline{0{,}518\,V}}$$

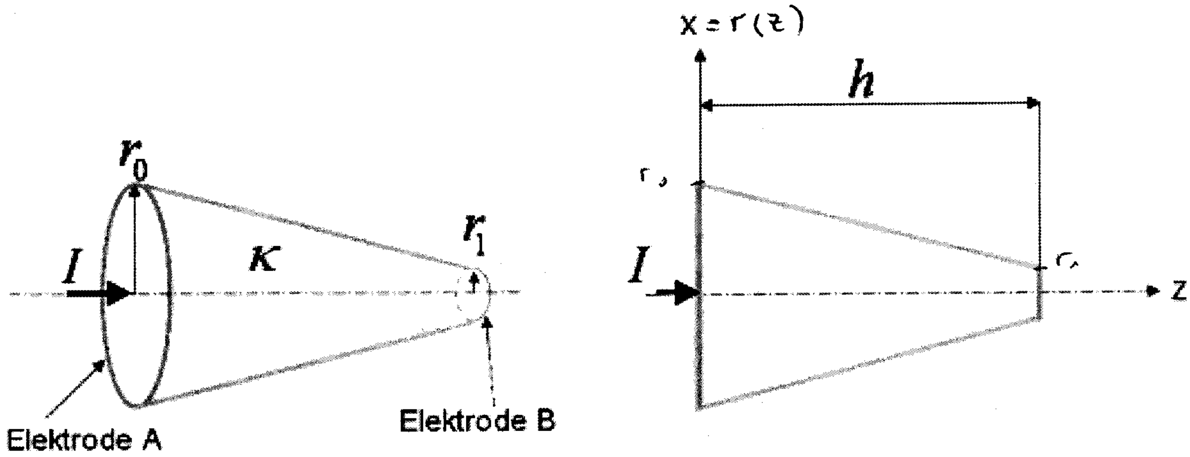
d) Der abgebildete Kondensator sei nun mit einem homogenen Dielektrikum gefüllt. Wie groß muss die relative Dielektrizitätszahl ε_r des Dielektrikums sein um die gleiche Kapazität wie im Aufgabenteil a) zu erreichen?

$$C_{ges_{neu}} = \frac{A}{d} \varepsilon_0 \varepsilon_r = C_{ges_{alt}} = \frac{48}{25} \frac{A \varepsilon_0}{d}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_r = \frac{48}{25} = \underline{\underline{1{,}92}}$$

3. Aufgabe

Zwischen zwei kreisförmigen, ideal leitfähigen Platten befindet sich ein kegelstumpfförmiger leitender Körper (Abb. 3) mit der Leitfähigkeit κ.



a) Kegelstumpfförmiger leitender Körper

b) Draufsicht

Abbildung 3

(Hinweis: $h \gg r_0, r_1$, d.h. es kann ein idealisierter Feldverlauf angenommen werden)

Gegeben: $h = 10\pi\, m,\quad r_0 = 10\, mm,\quad r_1 = 5\ mm,\quad \kappa = 2{,}3\ \Omega^{-1} m\ mm^{-2}$

a) Berechnen Sie allgemein die elektrische Stromdichte $\vec{J}(z)$.

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A} \xrightarrow{\text{ideal}} \vec{J}(z) = \frac{I}{A(z)}\, \vec{e}_z \quad ; \quad A(z) = \pi\, r^2(z)$$

$$r(z) = -\frac{(r_0 - r_1)}{h}\, z + r_0$$

$$\Rightarrow \vec{J}(z) = \frac{I}{\pi \left[-\frac{(r_0 - r_1)}{h}\, z + r_0 \right]^2}\, \vec{e}_z$$

b) Berechnen Sie allgemein die elektrische Spannung U_{AB} zwischen den Elektroden A und B.

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{ds} \qquad \vec{E} = E(z)\,\vec{e}_z = \frac{J(z)}{\kappa}\,\vec{e}_z \qquad \vec{ds} = dz\,\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow U_{AB} = \frac{1}{\kappa\pi} I \int_0^h \frac{dz}{\left[\frac{-r_0+r_1}{h} z + r_0\right]^2} = \frac{I}{\kappa\pi}\left[-\frac{h}{r_1-r_0} \frac{1}{\frac{r_1-r_0}{h} z + r_0}\right]_0^h$$

$$\underline{\underline{U_{AB} = \frac{I}{\kappa\pi} \frac{h}{r_1 r_0}}}$$

c) Berechnen Sie allgemein und zahlenmäßig den elektrischen Widerstand R .

$$R = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{\frac{1}{\kappa\pi} I \frac{h}{r_1 r_0}}{I} = \underline{\underline{\frac{1}{\kappa} \frac{h}{r_1 r_0}}}$$

$$\underline{\underline{R = 87\,m\Omega}}$$

....

4. Aufgabe

Eine Spannungsteilerschaltung nach Abb. 4a mit der Eingangsspannung U_0 enthält die Widerstände $R_1 = 120\,\Omega$ und $R_2 = 360\,\Omega$. Beim Anschließen des Lastwiderstandes R_L (Abb. 4b) soll sich die Ausgangsspannung U_2 höchstens um $p = 10\%$ ändern.

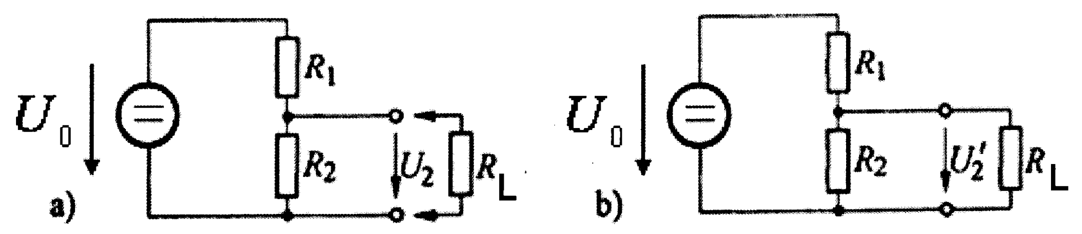


Abbildung 4

Wie groß muss der Lastwiderstand R_L mindestens sein?

$U_2 = U_0 \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} = 0{,}75 U_0$ (Unbelasteter Spannungsteiler)

$U_2' = U_0 \dfrac{R_P}{R_1 + R_P}$, $R_P = R_2 || R_L$ (belasteter Spannungsteiler)

Da U_2' höchstens um $p = 10\%$ kleiner sein darf als U_2, muss gelten

$U_2' = (1-p)\,U_2$ → Gleichsetzen → $(1-p)U_2 = U_0 \dfrac{R_P}{R_1 + R_P}$

Nach R_P stellen und mit $p = 10\% = 0{,}1$ und $U_2 = 0{,}75 U_0$

$\Rightarrow \quad R_P = \dfrac{(1-p)U_2}{U_0 - (1-p)U_2} R_1 = 249{,}2\,\Omega$

$R_P = \dfrac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} \rightarrow R_L = \dfrac{R_2 R_P}{R_2 - R_P} = 810\,\Omega$

5. Aufgabe

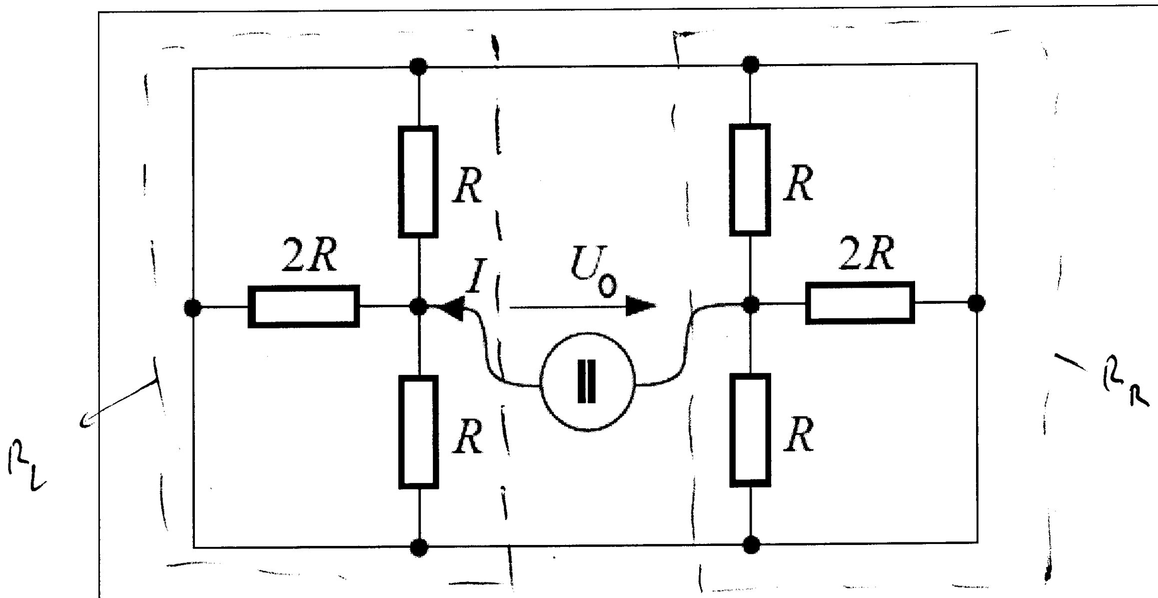


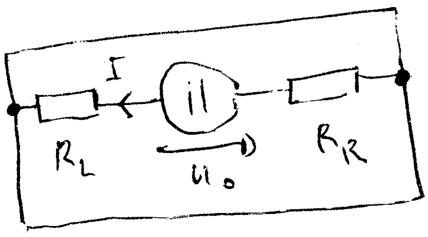
Abbildung 5a

Gegeben ist das obenstehende Netzwerk (Abb.5.a).

a) Bestimmen Sie den von der Quelle abgegebenen Strom I in Abhängigkeit von $\boldsymbol{U_0}$ und $\boldsymbol{R}$.

$$R_L = R_R = R \,||\, R \,||\, 2R = \frac{2}{5} R$$

Vereinfachtes Netzwerk :



$$\boxed{I = \frac{U_0}{R_L + R_R} = \frac{5}{4}\frac{U_0}{R}}$$

b) Es gelten jetzt die Werte: $U_0 = 100V$ und $R = 125\ \Omega$.
Welche Gesamtleistung gibt die Quelle ab?

$$P = U_0 I = \frac{5}{4}\frac{U_0}{R} U_0 = \frac{5}{4}\frac{U_0^2}{R} = 100\,W$$

c) Wie teilt sich diese Leistung auf die einzelnen Widerstände auf?
Tragen Sie die berechneten Leistungen in die Abbildung 5b ein.

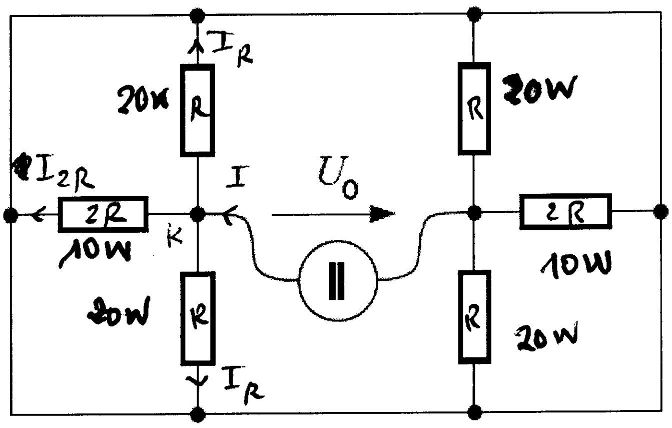


Abbildung 5b

Die Leistung teilt sich je zur Hälfte auf R_{Links} und R_{Rechts} auf.

Knoten K: $$\frac{I_R}{I} = \frac{1/R}{1/R_L} = \frac{R_L}{R} = \frac{2}{5}$$

$$I_R = \frac{2}{5} I$$

$$I_{2R} = I - 2 I_R = I - 2\frac{2}{5} I$$

$$I_{2R} = \frac{I}{5}$$

$$\boxed{P_R} = R I_R^2 = R\left[\frac{2}{5} I\right]^2 = R\left[\frac{2}{5}\frac{5}{4}\frac{U_0}{R}\right]^2 = \underline{\underline{20\,W}}$$

$$\boxed{P_{2R}} = 2R I_{2R}^2 = 2R\left[\frac{I}{5}\right]^2 = 2R\left[\frac{1}{5}\frac{5}{4}\frac{U_0}{R}\right]^2 = \underline{\underline{10\,W}}$$

6. Aufgabe

Die folgende Abbildung zeigt den Querschnitt einer in Luft sich befindende Anordnung aus drei parallelen, unendlich langen z-gerichteten Linienleiter (*L1*, *L2* bzw. *L4*). Diese werden von den Gleichströmen I_1, I_2 bzw. I_3 mit der angegebenen Orientierung durchflossen.

Der Linienleiter *L1* befindet sich im Koordinatenursprung, der Linienleiter *L2* befindet sich an der Stelle x = 0, y = -a und der Linienleiter *L3* auf einem Kreis um den Ursprung mit dem Radius a. Die Position des dritten Linienleiters wird durch den Winkel φ beschrieben.

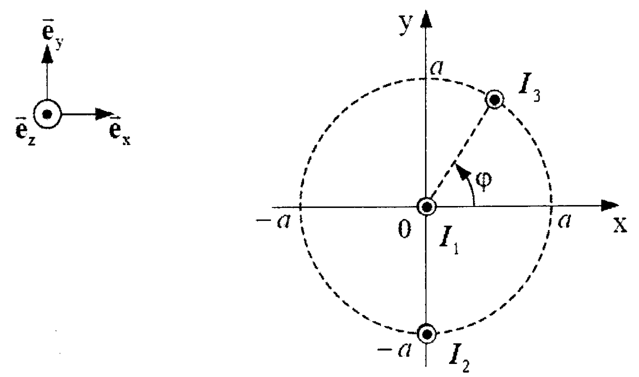


Abbildung 6

a) Bestimmen Sie die Kraft pro Längeneinheit $\vec F' = \frac{\vec F}{l}$, die auf den Linienleiter *L1* im Koordinatenursprung ausgeübt wird?

Ansatz: $\vec F = I \vec l \times \vec B$, $\vec B = \mu \vec H$, $I = \oint \vec H \cdot d\vec s$ $\longrightarrow$ $\vec H(\varrho) = \frac{I}{2\pi\varrho}\vec e_\varphi$

$\vec H(\varrho) = H(\varrho)\vec e_\varphi$

Mit $\mu = \mu_0$ folgt mit $\vec l = l\vec e_z$

$$\vec F'_{21} = \frac{\vec F_{21}}{l} = I_1(\vec e_z \times \vec B_2)$$

$$= I_1 \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}(\vec e_z \times (-\vec e_x)) = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi a}(-\vec e_y)$$

$$\vec B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi a}(-\vec e_x)$$

$$\vec B_3 = \mu_0 \frac{I_3}{2\pi a}\vec e_3$$

$$\vec e_\varrho = -\vec e_y \cos\varphi + \vec e_x \sin\varphi$$

$$\vec F'_{31} = \mu_0 \frac{I_1 I_3}{2\pi a}\left(\vec e_z \times \left[\sin\varphi\, \vec e_x - \cos\varphi\, \vec e_y\right]\right)$$

$$= \mu_0 \frac{I_1 I_3}{2\pi a}\left[\cos\varphi\, \vec e_x + \sin\varphi\, \vec e_y\right]$$

$$\vec F'_{ges,1} = \vec F'_{21} + \vec F'_{31} = \frac{I_1 I_2}{2\pi a}(-\vec e_y) + \mu_0 \frac{I_1 I_3}{2\pi a}\left[\cos\varphi\, \vec e_x + \sin\varphi\, \vec e_y\right]$$

b) Nachfolgend haben die Gleichströme I_2 und I_3 den gleichen Wert ($I_2 = I_3 = I$). Bestimmen Sie alle Winkel $\varphi = \varphi_0$, so dass der Betrag der Kraft $|\vec{F}'|$ auf den Linienleiter *L1* infolge der beiden Ströme I_2 und I_3 genauso groß wie der Betrag der Kraft pro Längeneinheit $|\vec{F}_{12}'|$ auf den Linienleiter *L1*, die allein durch den Strom I_2 hervorgerufen wird

Ansatz:

$$\left|\vec{F}_{21}'\right| = \left|\vec{F}_{21}' + \vec{F}_{31}'(\varphi_0)\right|$$

$$\frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi a} \underbrace{\left|\cos\varphi_0 \, \vec{e}_x + (\sin\varphi_0 - 1)\, \vec{e}_y\right|}_{\text{Betrag} = m}$$

$$\Rightarrow m = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\cos^2\varphi_0 + [\sin\varphi_0 - 1]^2} = 1$$

$$\rightarrow \sqrt{2 - 2\sin\varphi_0} = 1 \rightarrow \sin\varphi_0 = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} \rightarrow \varphi_{01} = 30^\circ \\ \rightarrow \varphi_{02} = 150^\circ \end{cases}$$

$$\boxed{\varphi_0 = 30^\circ \text{ oder } \varphi_0 = 150^\circ}$$

7. Aufgabe

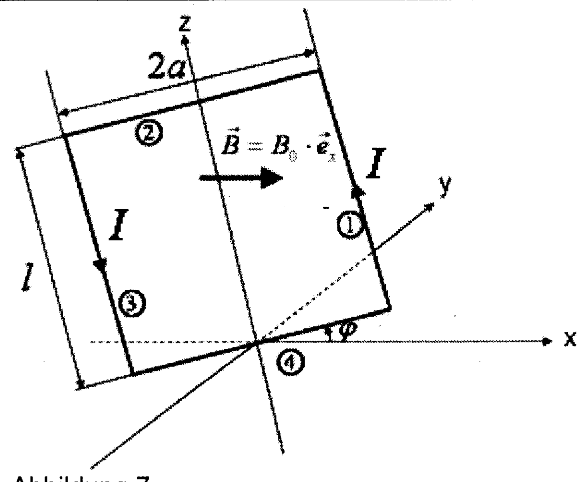


Abbildung 7

Um die *z*-Achse des kartesischen Koordinatensystems *(x, y, z)* ist eine rechteckförmige Leiterschleife, die von dem Gleichstrom I durchflossen wird, drehbar gelagert. Die Leiterschleife besitzt die Höhe l und die Breite *2a* (Abb.7). Der gesamte Raum ist von einer homogenen magnetischen Flussdichte $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{e}_x$ durchsetzt. Der Querschnitt des Drahtes sei so klein, dass die Bedingungen für einen Linienleiter erfüllt sind. Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Drehwinkel φ

a) Wie groß ist die auf das linke Leiterstück 3 wirkende Kraft $\vec{F}_3$ sowie die auf das rechte Leiterstück 1 wirkende Kraft $\vec{F}_1$?

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_3 = \left[-I l \vec{e}_z\right] \times B_0 \vec{e}_x = I l B_0 \left[-\vec{e}_z \times \vec{e}_x\right] = I l B_0 (-\vec{e}_y)$$

$$\vec{F}_1 = I l \vec{e}_z \times B_0 \vec{e}_x = -\vec{F}_3 = I l B_0 \vec{e}_y$$

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit des Winkels φ die auf das obere Leiterstück 2 wirkende Kraft $\vec{F}_2$ sowie die auf das untere Leiterstück 4 wirkende Kraft $\vec{F}_4$.

$$\vec{F}_2 = I\,2a\left[-\cos\varphi\,\vec{e}_x - \sin\varphi\,\vec{e}_y\right] \times B_0\,\vec{e}_x$$

$$\vec{F}_2 = I\,2a\,B_0 \sin\varphi\,\vec{e}_z$$

Symmetrie $\vec{F}_4 = -\vec{F}_2 = I\,2a\,B_0 \sin\varphi\left(-\vec{e}_z\right)$

c) Bestimmen Sie die auf die Leiterschleife wirkende Gesamtkraft.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{aus a)} & \vec{F}_1 = -\vec{F}_3 \\ \text{aus b)} & \vec{F}_2 = -\vec{F}_4\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F}_{ges} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i = \vec{0}$$

8. Aufgabe

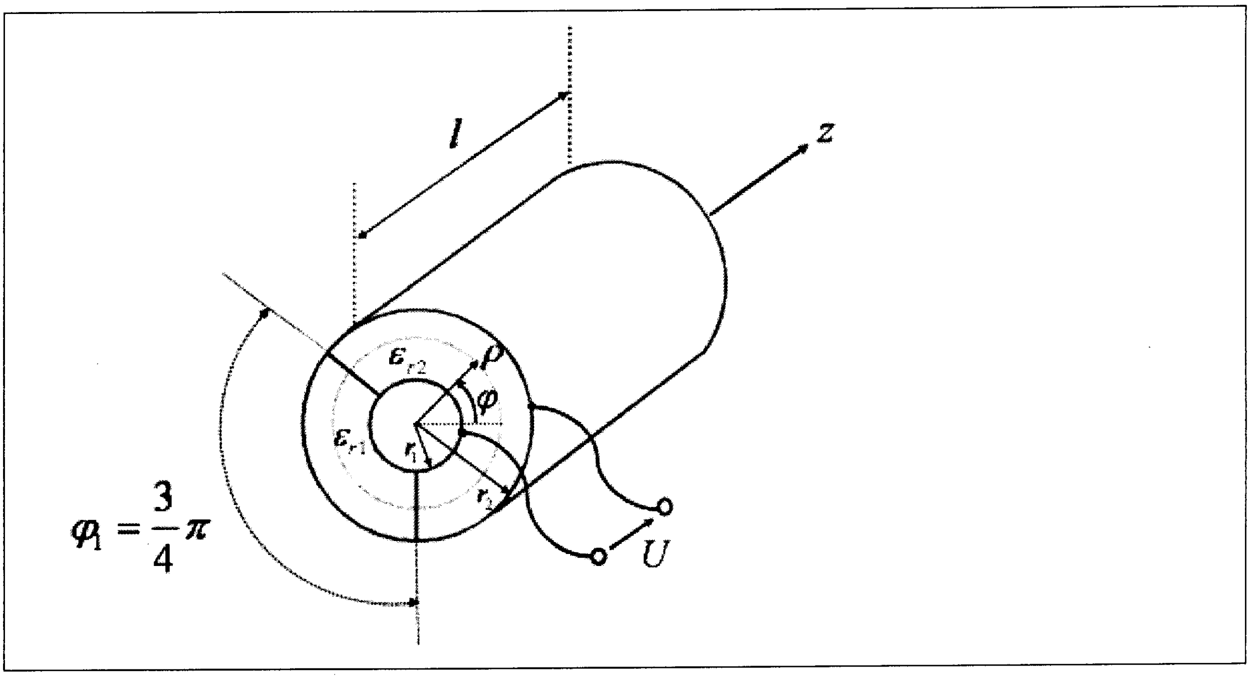


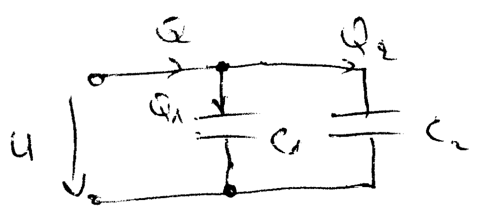
Abbildung 8

Zwischen den ideal leitenden Wänden zweier konzentrisch angeordneter Rohre der Länge l mit den Radien r_1, r_2 befinden sich zwei verschiedene Dielektrika mit der dargestellten Aufteilung in Längsrichtung. Die Anordnung trägt die Ladung Q. Abbildung 8 zeigt diese Anordnung in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z).

	$l = 1m$		$Q = 10^{-9} As$
Gegeben:	$r_1 = 2cm$	und	$\varepsilon_{r1} = 2$
	$r_2 = 4cm$		$\varepsilon_{r2} = 4$

Hinweis: Randeffekte sind zu Vernachlässigen.

8.a. Zeichnen Sie für die gegebene Anordnung ein elektrisches Ersatzschaltbild.



8.b. Geben Sie die Ladung Q in Abhängigkeit von den Verschiebungsdichten $\vec{D}_1$ und $\vec{D}_2$ in den Isolierstoffen an.

$$Q = Q_1 + Q_2 \qquad Q_1 = \iint_{A_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{A}_1 \; ; \; Q_2 = \iint_{A_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{A}_2$$

$$d\vec{A} = \varrho \, d\varphi \, dz \, \vec{e}_\varrho$$

$$Q_1 = \int_0^{l} \int_0^{\varphi_1} D_1 \varrho \, d\varphi \, dz = D_1 \varrho l \varphi_1 \qquad \text{analog } Q_2 = D_2 \varrho l \varphi_2$$

$$\varphi_1 = \frac{3}{4}\pi \qquad \varphi_2 = \frac{5}{4}\pi$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = \varrho l (\varphi_1 D_1 + \varphi_2 D_2) = \underline{\underline{\frac{\varrho l}{4} \pi (3 D_1 + 5 D_2)}}$$

8.c. Berechnen Sie die zwischen den Rohren liegende Spannung U allgemein und zahlenmäßig.

$$\left.\begin{aligned} \vec{D}_1 &= \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \vec{E}_1 \\ \vec{D}_2 &= \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} \vec{E}_2 \end{aligned}\right\} \text{mit } \vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E} \quad (\text{stetig})$$

$$\hookrightarrow \text{aus 8b)} \quad Q = \frac{l\pi}{4} \varrho \varepsilon_0 \left[3 \varepsilon_{r_1} E + 5 \varepsilon_{r_2} E \right]$$

$$\vec{E} = \frac{4Q}{l \pi \varrho \varepsilon_0 (3\varepsilon_{r_1} + 5\varepsilon_{r_2})} \vec{e}_\varrho \qquad d\vec{s} = d\varrho \, \vec{e}_\varrho$$

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{4Q}{l \pi \varepsilon_0 (3\varepsilon_{r_1} + 5\varepsilon_{r_2})} \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\varrho}{\varrho}$$

$$\underline{\underline{U = \frac{4Q}{l \pi \varepsilon_0 (3\varepsilon_{r_1} + 5\varepsilon_{r_2})} \ln \frac{r_2}{r_1}}} \Rightarrow \underline{U = 3{,}84 \text{ V}}$$

8.d. Berechnen Sie die Kapazität zahlenmäßig.

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{10^{-9}\,As}{3{,}84\,V} = \underline{\underline{260\,pF}}$$

9. Aufgabe

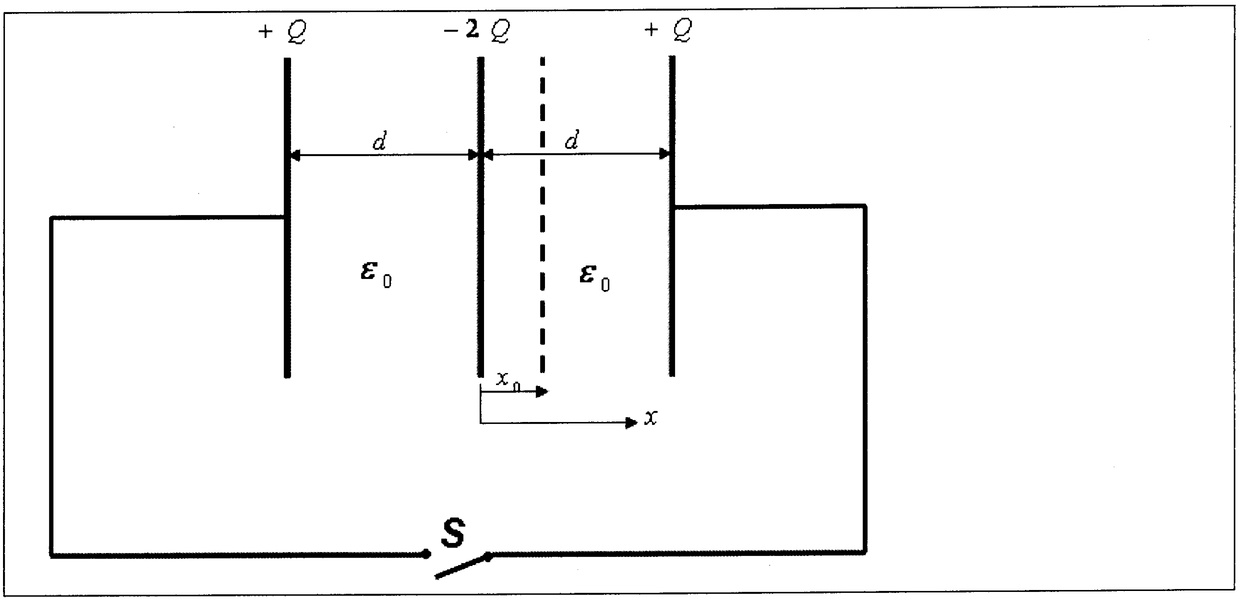
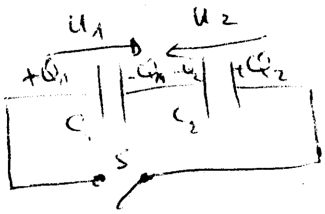


Abbildung 9

Gegeben sind drei gleiche Platten (Plattenabstand d und Plattenfläche A). Zwischen den Platten befindet sich Luft und das elektrische Feld sei dort homogen (Randeffekte sind zu vernachlässigen). Die linke und rechte Platte tragen jeweils die Ladung $+Q$, auf der mittleren befindet sich die Ladung $-2Q$. Die mittlere Platte kann in x-Richtung verschoben werden. (Siehe Abbildung 9)

9.a. Berechnen Sie die elektrische Energie W_0 des gesamten Systems (Schalter geöffnet und die mittlere Platte steht in der Mitte).

Reihenschaltung



$$C_1 = C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = C_0$$

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

$$Q_1 + Q_2 = 2Q$$

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{2C}} \rightarrow W_{01} = W_{02} = \frac{Q^2}{2C_0}$$

$$W_0 = W_{01} + W_{02} = \frac{Q^2}{C_0} = \underline{\underline{\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 A}}}$$

9.b. Berechnen Sie die elektrische Energie W_1 des gesamten Systems (Schalter geöffnet und die mittlere Platte um die Strecke x_0 verschoben). Wie ändert sich die elektrische Energie $\Delta W = W_0 - W_1$ des gesamten Systems?

$Q_1 = Q_2 = Q \qquad x_0 > 0$

$W_1 = W_{11} + W_{12}$ mit $\boxed{W_{11} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1'}}$ $\boxed{W_{12} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2'}}$ $\qquad C_1' = \frac{\varepsilon_0 A}{d+x_0} \qquad C_2' = \frac{\varepsilon_0 A}{d-x_0}$

$W_{11} = \frac{Q^2(d+x_0)}{2\varepsilon_0 A}$

$W_{12} = \frac{Q^2}{2}\frac{d-x_0}{\varepsilon_0 A}$

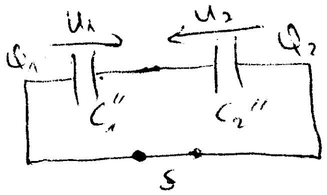
$W_1 = W_{11} + W_{12} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}\left(d+x_0+d-x_0\right) = \underline{\underline{\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 A}}}$

Vergleich mit 9a) $\boxed{W_0 = W_1}$

Gesamtenergie ändert sich nicht

9.c. Berechnen Sie die elektrische Energie W_2 des gesamten Systems (Schalter geschlossen und die mittlere Platte um die Strecke x_0 verschoben). Wie ändert sich die elektrische Energie $\Delta W = W_0 - W_2$ des gesamten Systems?

$x_0 > 0$



$2Q = Q_1 + Q_2 \qquad C_1'' = \frac{\varepsilon_0 A}{d+x_0} \qquad C_2'' = \frac{\varepsilon_0 A}{d-x_0}$

$U_1 = U_2 = U$

$U = \frac{2Q}{C_{ges}} \qquad C_{ges} = C_1'' \,||\, C_2'' = C_1'' + C_2'' = \varepsilon_0 A\left(\frac{2d}{d^2-x_0^2}\right)$

$W_2 = W_{ges} = W_{21} + W_{22} = \frac{1}{2}C_{ges}U^2 = \frac{1}{2}(C_1''+C_2'')\frac{(2Q)^2}{(C_1''+C_2'')^2}$

$W_2 = \frac{2Q^2}{C_1''+C_2''} = \frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}\frac{d^2-x_0^2}{d} = \underbrace{\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}d}_{W_0} - \frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}\frac{x_0^2}{d}$

Vergleich mit 9a) $W_0 - W_2 = \frac{Q^2 x_0^2}{\varepsilon_0 A d} > 0$

also Energieabnahme von W_0 um den Betrag $\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}\frac{x_0^2}{d}$.

10. Aufgabe

Der rechteckige Leiter nach Abb. 10 mit dem Querschnitt A und der Länge l besitzt die ortsabhängige Leitfähigkeit $\kappa = \kappa_0 (1 + a x)$. Die Elektroden an den beiden Deckelflächen bei $x = 0$ und $x = l$ sind unendlich gut leitend. Der Leiter führt den Gleichstrom I in x – Richtung. Der Strom I sei gegeben.

Gegeben Sind: $\kappa_0 = 0.01 \dfrac{S}{cm}$, $a = 1\ cm^{-1}$, $l = 1.72\,cm$ und $A = 100\,cm^2$.

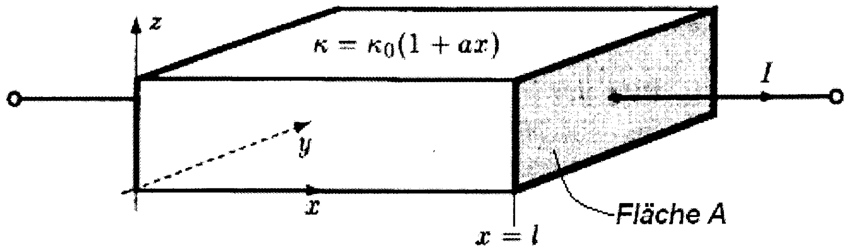


Abbildung 10

10.a. Berechnen Sie allgemein die elektrische Stromdichte $\vec{J}$.

$$\vec{J} = \frac{I}{A} \vec{e}_x$$

10.b. Berechnen Sie allgemein die elektrische Feldstärke $\vec{E}$.

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\kappa} = \frac{I}{A} \frac{1}{\kappa_0 (1 + a x)} \vec{e}_x$$

10.c. Berechnen Sie allgemein und zahlenmäßig den elektrischen Widerstand R des Leiters.

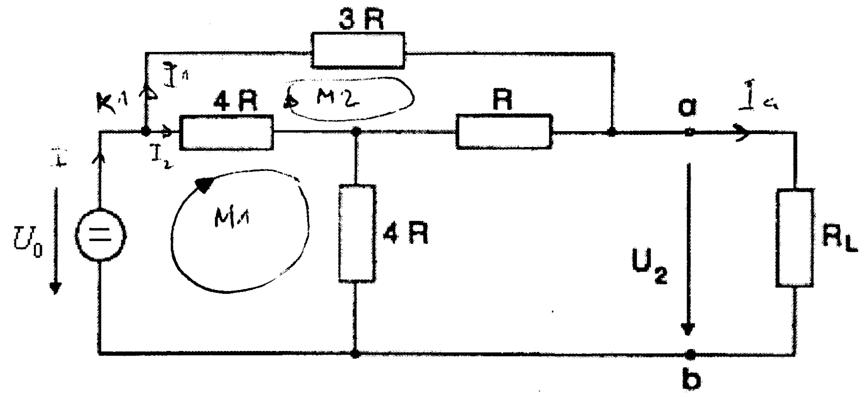
$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{s}}{I} \overset{d\vec{s} = dx\,\vec{e}_x}{=} \int_0^l \frac{dx}{A \kappa_0 (1 + a x)} = \frac{1}{A\kappa_0} \int_0^l \frac{dx}{1 + a x}$$

$$= \frac{1}{A\kappa_0} \frac{1}{a} \ln (1 + a x) \Big|_0^l \Rightarrow \underline{\underline{R = \frac{\ln (1 + a l)}{\kappa_0 A\, a}}}$$

$$R = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{cm} \cdot 1{,}72\,cm\right)}{0{,}01 \frac{S}{cm}\ 100\,cm^2\ \frac{1}{cm}} \approx \frac{\ln e}{1} \Omega = \frac{1}{1} \Omega = \underline{\underline{1\,\Omega}} \qquad e \approx 2{,}718\ldots$$

11. Aufgabe

Das Netzwerk nach Abb. 11 ist bezüglich der Klemmen a, b durch eine Ersatzspannungsquelle darzustellen, die durch den Widersand R_L belastet wird.
Gegeben sind: $U_0 = 4\,V$ und $R = 3\,\Omega$



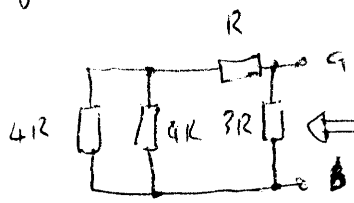
Gegeben: $U_0 = 4\,V$

$R = 3\,\Omega$

Abbildung 11

11.a. Berechnen Sie den Innenwiderstand R_i der Ersatzquelle.

Kurzschluß der Quelle U_0



$R_i = 3R \,||\, 3R = \frac{3}{2} R = \frac{9}{2}\,\Omega = 4{,}5\,\Omega$

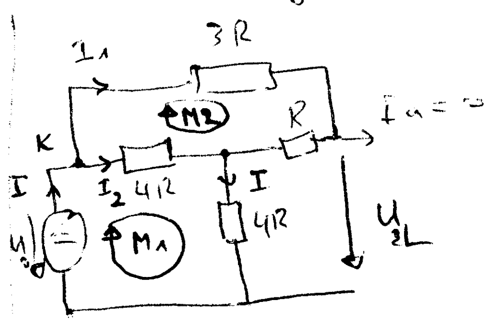
11.b. Berechnen Sie die Leerlaufspannung U_{2L} der Ersatzquelle.

Leerlauf $\Leftrightarrow I_a = 0$

Knoten K: $I = I_1 + I_2$

(1) Masche M1: $-U_0 + 4R I_2 + (I_1 + I_2) 4R = 0$

(2) Masche M2: $I_1 4R - 4R I_2 = 0$



(1) - (2) $\longrightarrow I_2 = \frac{U_0}{12R} = \frac{4V}{36\Omega} = 0{,}11\,A$ $\qquad I_1 = I_2$

$U_{2L} = I_1 R + (I_1 + I_2) 4R$ $\qquad I_1 = I_2 = 0{,}111\,A$

$U_{2L} = 9 I_1 R = 2{,}999\,V$

$U_{2L} \approx 3V$

12. Aufgabe

Parallel zu einer Leiterschleife mit N = 10 Windungen verlaufen im gleichen Abstand zwei unendlich lange Leiter. Die Leiterschleife soll in der von den Leitern aufgespannten XY-Ebene liegen, durch die Leiter fließe ein sich zeitlich verändernder Strom $i(t)$ in den angegebenen Richtungen (Abbildung 12).

Der die Leiterschleife durchsetzende und durch die beiden Stromleitern erzeugte magnetische Fluss $\phi(t)$ sei gegeben:

$$\phi(t) = \frac{\mu_0 \cdot i(t) \cdot h}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{a+b}{a}\right).$$

a = 10 mm
b = 20 mm
h = 100 mm
μ_0 = $4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am
μ_r = 1

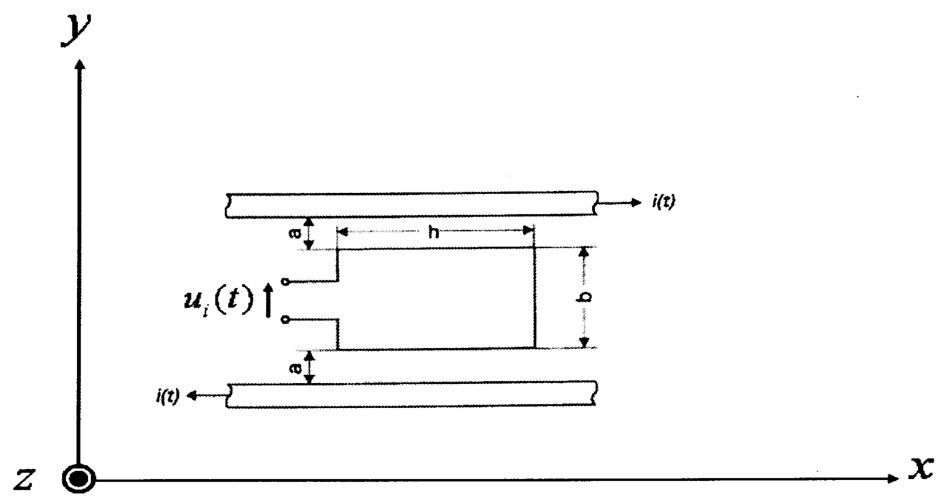


Abbildung 12

12.a. In welcher Richtung durchsetzt der magnetische Fluss $\phi(t)$ die Leiterschleife

in $-\vec{e}_z$ - Richtung

12.b. Berechnen Sie allgemein die in der Leiterschleife induzierte Spannung $u_i(t)$, bei vorgegebenem Strom $i(t)=\hat{i}\sin(\omega\cdot t)$.

$$u_i(t) = -N\frac{d\phi}{dt} = -N\frac{d}{dt}\left\{\frac{\mu_0\, i(t)\, h}{\pi}\ln\left[\frac{a+b}{a}\right]\right\}$$

$$= -\frac{N\mu_0 h}{\pi}\ln\left[\frac{a+b}{a}\right]\frac{d}{dt}\left(\hat{i}\sin(\omega t)\right)$$

$$= -\frac{N\mu_0 h}{\pi}\ln\left[\frac{a+b}{a}\right]\hat{i}\,\omega\cos\omega t$$

12.c. Berechnen Sie die maximal induzierte Spannung, wenn $\hat{i}=10\,A$ und $f=50\,Hz$ betragen.

$\omega = 2\pi f$; $\hat{i} = 10\,A$ $N = 10$ $b = 2a = 20\,mm$

$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}\,\frac{Vs}{Am}$ $h = 100\,mm$

$$\hat{u}_i = \frac{N\mu_0 h}{\pi}\ln\left[\frac{a+b}{a}\right]\hat{i}\,2\pi f$$

$$\underline{\underline{\hat{u}_i = 1{,}38\,mV}}$$

13. Aufgabe

Die Schaltung nach Abbildung 13 enthält den ohmschen Widerstand $R_1 = 200\,\Omega$.
Die Versorgungsspannung beträgt $\underline{U} = 75V \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}$ mit der Frequenz $f = 800\,Hz$. Die Teilspannungen sind $\underline{U}_1 = 40V \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}$ und $\underline{U}_2 = 50V \cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t - 67{,}6^o)}$.

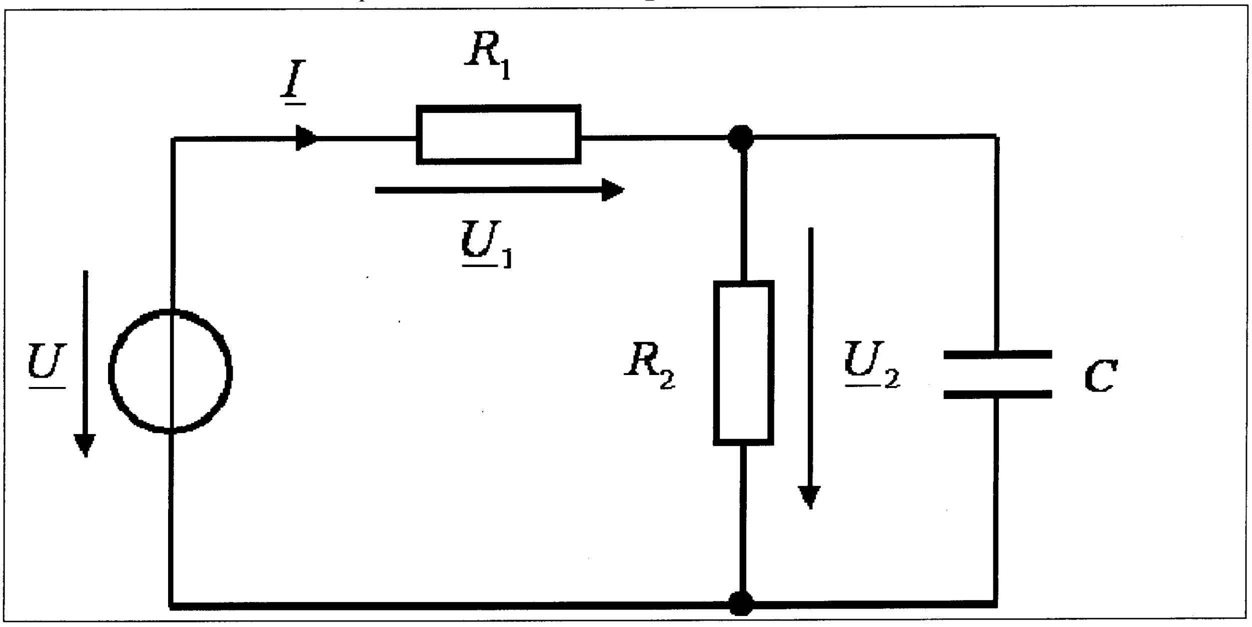


Abbildung 7

13.a. Berechnen Sie den Strom $\underline{I}$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_1}{R_1} = 0{,}2\,A \quad \text{(in Phase)}$$

13.b. Berechnen Sie die Ersatzadmittanz $\underline{Y}_{ab}$ der Parallelschaltung des ohmsche Widerstandes R_2 und der Kapazität C zwischen den Klemmen a und b.

$$\underline{Y}_{ab} = \frac{1}{R_2} + j\omega C = \frac{\underline{I}}{\underline{U}_2} = \frac{0{,}2\,A}{50\,V\ e^{-j67{,}6}}$$

$$= 1{,}525\,mS + j\,3{,}70\,mS$$

$$= 4\,mS\ e^{+j67{,}6}$$

13.c. Welche Werte haben der ohmsche Widerstand R_2 und die Kapazität C

Real- & Im-Teile vergleichen

$$\underline{Y}_{ab} = \frac{1}{R_2} + j\omega C = 1{,}525\,mS + j\,3{,}7\,mS$$

$$R_2 = \frac{1}{1{,}525\,mS} = \underline{\underline{656\,\Omega}}$$

$$C = \frac{\omega C}{\omega} = \frac{3{,}70 \cdot 10^{-3}\,S}{2\pi\,800\,Hz} = 736 \cdot 10^{-9}\,\frac{S}{s^{-1}}$$

$$S = \frac{A}{V} \longrightarrow \left[\frac{S}{s^{-1}}\right] = \left[\frac{As}{V}\right] = [F]$$

$$\underline{\underline{C = 736\,nF}}$$