„Grundlagen der Mess- und Regelungstechnik“
Prüfung Sommersemester 2016
Teil 1: Theorieteil

9 LP

4. August 2016

Zeitraum: 8:15 - 9:00 Uhr

erlaubte Hilfsmittel: keine

Name, Vorname: ________________________________

Matr. Nr: ________________________________

Studiengang: ________________________________

Ich strebe einen ○Bachelor-, ○Master-, ○Diplom-Abschluss an.

Ich habe meinen GMRT-Übungsschein im Wintersemester 20___ erhalten.

	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
Σ Theorieteil	18	
Σ Rechenteil	39	

1. (*1 Punkt*) Wie kennzeichnet man Verzweigungen und Summation in einem Blockschaltbild? Zeichnen und beschriften Sie beides.
2. (*1 Punkt*) Was versteht man unter der Methodenorientierung der Regelungstechnik?
3. (*1 Punkt*) Sie erhalten von einem Kollegen die gemessene Sprungantwort der Temperatur eines Reaktionskessels. Der Verlauf beginnt bei 0. Wurde somit das Experiment bei 0 °C, 0 K oder einer anderen Temperatur durchgeführt?
4. (*2 Punkte*) Sie haben eine Regelstrecke mit integrierendem Verhalten.
   Betrachten Sie die zwei folgenden Fälle:
   1. Die Stellgröße ist gestört.
   2. Der Ausgang der Strecke ist gestört.
   Was ist im jeweiligen Fall nötig um eine bleibende Regelabweichung von 0 bei einer konstanten Störung zu erreichen?
5. (*1 Punkt*) Das Modell einer Regelstrecke lautet: $\dot{y}(t) = -5y(t) + \sqrt{u(t)}$. Sie wollen einen linearen Regler festlegen.
   Welches Vorgehen verspricht das beste Ergebnis?
   (Hinweis: Sie müssen keinen Regler aussuchen.)
6. (*2 Punkte*) Sie erhalten Messdaten einer Anlage und die Information, dass die Ein-/Ausgangsdaten am Besten mit einem IDT_3-Modell anpassbar sind. Geben Sie dessen Übertragungsfunktion an und skizzieren Sie mit wenigen Worten, wie die zugehörigen Parameter bestimmt werden können.
7. (*1 Punkt*) Wie lautet die Vorschrift der Laplace-Transformation?
8. (*1 Punkt*) Die Übertragungsfunktion eines Systems lautet $G(s) = \frac{1}{(5s+1)(2s+2)}$. Aus welchen mathematischen Funktionen setzt sich die Sprungantwort im Zeitbereich zusammen? Geben Sie diese unter Verwendung von Konstanten an. (Hinweis: Sie müssen die Sprungantwort nicht ausrechnen)
9. (*1 Punkt*) Wozu benötigt man ein Anti-Windup?
10. (*3 Punkte*) In vielen Anlagen treten Totzeiten auf. Benennen Sie ein Verfahren der Regelungstechnik (nicht Auslegung nach Tabellen), bei dem man auch Totzeiten betrachten kann. Schlagen Sie eine Möglichkeit vor wie man auch die anderen Verfahren verwenden kann. Neben einer kurzen Erläuterung soll auch ein dazugehöriges Blockschaltbild angegeben werden.
11. (*1 Punkte*) Was passiert bei Aliasing?
12. (*1 Punkt*) Erklären Sie den Unterschied zwischen einem direkten und indirekten Messverfahren
13. (*1 Punkt*) Erläutern Sie das Differenzprinzip in der Messtechnik.
14. (*1 Punkt*) Mit welchem Verfahren könnte man den Durchfluss von Früchtejoghurt messen? Begründen Sie kurz.

„Grundlagen der Mess- und Regelungstechnik"
Prüfung Sommersemester 2016
Teil 2: Rechenteil

9 LP

4. August 2016

Zeitraum: 9:15 - 11:15 Uhr

Hilfsmittel: Taschenrechner, zwei beschriebene Blätter

Name, Vorname: ______________________

Matr. Nr: ______________________

Studiengang: ______________________

Bachelor / Master / Diplom: ______________________

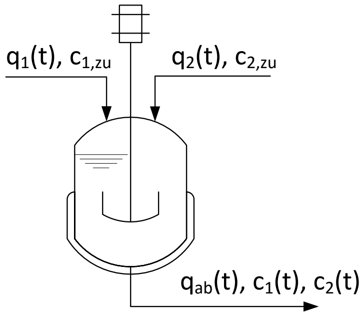
Semester Übungsschein: ______________________

	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
Σ Theorieteil	18	
Aufgabe 1	6	
Aufgabe 2	7,5	
Aufgabe 3	10	
Aufgabe 4	10,5	
Aufgabe 5	5	
Summe	57	

Note:

1. Aufgabe (6 Punkte)

In einen Mischer fließen die Zulaufvolumenströme (Volumen/Zeit) $q_1(t)$ und $q_2(t)$. In den Strömen 1 und 2 sind in einem Trägermedium, z.B. Wasser, die Stoffe 1 und 2 mit den Massenkonzentrationen (Masse/Volumen) $c_{1,\mathrm{zu}}$ und $c_{2,\mathrm{zu}}$ gelöst. Die Ströme 1 und 2 werden in einem Behälter gemischt und es fließt ein Ablaufstrom (Volumen/Zeit) $q_{\mathrm{ab}}(t)$ mit den Massenkonzentrationen (Masse/Volumen) $c_1(t)$ und $c_2(t)$ ab.



a) (*3 Punkte*) Ermitteln Sie die Differentialgleichungen zur Bestimmung der zeitlichen Verläufe des Flüssigvolumens V im Reaktor und von c_1 und c_2 im Ablauf. Stellen Sie dazu zunächst die Massenbilanzen der Komponenten 1 und 2 und eine Gesamtmassenbilanz auf. Überführen Sie die Gesamtmassenbilanz in eine Darstellung mit Volumen und Gesamtdichte unter der Annahme, dass die Dichte der Zuflüsse gleich ist und auch der Gesamtdichte des Gemischs in dem Reaktor entspricht.

Quereinstieg: Rechnen Sie in Aufgabenteil 1b) unbedingt mit dem folgenden System weiter:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = k_1 \cdot \frac{x_2(t)}{x_2(t) + k_1} \cdot x_1(t) - k_2 \cdot x_1(t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{k_3} \cdot k_1 \cdot \frac{x_2(t)}{x_2(t) + k_1} \cdot x_1(t) + u_2(t) \cdot u_1(t).$$

b) (*3 Punkte*) Berechnen Sie die Zustände im Betriebspunkt (stationären Punkt) $x_{1,\mathrm{s}} > 0$ und $x_{2,\mathrm{s}} > 0$ unter der Voraussetzung, dass $u_{1,\mathrm{s}}$ und $u_{2,\mathrm{s}}$ bekannt sind.

Musterlösung

a) **3 Punkte:**
Massenbilanzen aufstellen

$$\frac{dm_1}{dt} = q_1 \cdot c_{1,\mathrm{zu}} - q_{\mathrm{ab}} \cdot c_1 \tag{1}$$

(0.5 Punkte)

$$\frac{dm_2}{dt} = q_2 \cdot c_{2,\mathrm{zu}} - q_{\mathrm{ab}} \cdot c_2 \tag{2}$$

(0.5 Punkte)

Masse $m = \rho \cdot V$ und anschließend Produktableitung der Masse erstellen

$$V \cdot \frac{dc_1}{dt} + c_1 \frac{dV}{dt} = q_1 \cdot c_{1,\mathrm{zu}} - q_{\mathrm{ab}} \cdot c_1 \tag{3}$$

(0.25 Punkte)

$$V \cdot \frac{dc_2}{dt} + c_2 \frac{dV}{dt} = q_2 \cdot c_{2,\mathrm{zu}} - q_{\mathrm{ab}} \cdot c_2 \tag{4}$$

(0.25 Punkte)

Gleichungen umstellen

$$\frac{dc_1}{dt} = \frac{1}{V}\left(q_1 \cdot c_{1,\mathrm{zu}} - q_{\mathrm{ab}} \cdot c_1 - c_1 \frac{dV}{dt}\right) \tag{5}$$

(0.25 Punkte)

$$\frac{dc_2}{dt} = \frac{2}{V}\left(q_2 \cdot c_{2,\mathrm{zu}} - q_{\mathrm{ab}} \cdot c_2 - c_2 \frac{dV}{dt}\right) \tag{6}$$

(0.25 Punkte)

Aus Massenbilanz und $\rho_1 = \rho_2 = \rho_{\mathrm{ges}}$ folgt

$$\frac{dm}{dt} = \rho_1 \cdot q_1 + \rho_2 \cdot q_2 - \rho_{\mathrm{ges}} \cdot q_{\mathrm{ab}} \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = q_1 + q_2 - q_{\mathrm{ab}}. \tag{7}$$

(0.5 Punkte)

Damit ergibt sich

$$\frac{dc_1}{dt} = \frac{1}{V}\left(q_1 \cdot c_{1,\mathrm{zu}} - q_1 \cdot c_1 - q_2 \cdot c_1\right) \tag{8}$$

(0.25 Punkte)

$$\frac{dc_2}{dt} = \frac{1}{V}\left(q_2 \cdot c_{2,\mathrm{zu}} - q_1 \cdot c_2 - q_2 \cdot c_2\right) \tag{9}$$

(0.25 Punkte)

b) **3 Punkte:**

Alle zeitlichen Ableitungen werden zu Null gesetzt und alle zeitabhängigen Größen bekommen den Index s

$$0 = \underbrace{\left(k_1 \cdot \frac{x_{2,\mathrm{s}}}{x_{2,\mathrm{s}} + k_1} - k_2\right)}_{=0} \cdot x_{1,\mathrm{s}} \tag{10}$$

(0.5 Punkte)

$$k_2 = k_1 \cdot \frac{x_{2,\mathrm{s}}}{x_{2,\mathrm{s}} + k_1} \tag{11}$$

(0.25 Punkte)

$$x_{2,\mathrm{s}} = \frac{k_2 \cdot k_1}{k_1 - k_2} \tag{12}$$

(0.25 Punkte)

$$0 = -\frac{1}{k_3} \cdot k_1 \cdot \frac{x_{2,\mathrm{s}}}{x_{2,\mathrm{s}} + k_1} \cdot x_{1,\mathrm{s}} + u_{3,\mathrm{s}} \cdot u_{1,\mathrm{s}} \tag{13}$$

(0.5 Punkte)

$$u_{3,\mathrm{s}} \cdot u_{1,\mathrm{s}} = \frac{1}{k_3} \cdot k_1 \cdot \frac{x_{2,\mathrm{s}}}{x_{2,\mathrm{s}} + k_1} \cdot x_{1,\mathrm{s}} \tag{14}$$

(0.25 Punkte)

$$x_{1,\mathrm{s}} = \frac{k_3 \cdot u_{3,\mathrm{s}} \cdot u_{1,\mathrm{s}} \cdot (x_{2,\mathrm{s}} + k_1)}{k_1 \cdot x_{2,\mathrm{s}}} \tag{15}$$

(0.25 Punkte)

Mit (12) ergibt sich

$$x_{1,\mathrm{s}} = \frac{k_3 \cdot u_{3,\mathrm{s}} \cdot u_{1,\mathrm{s}}(\frac{k_2 \cdot k_1}{k_1 - k_2} + k_1)}{k_1 \cdot \frac{k_2 \cdot k_1}{k_1 - k_2}}. \tag{16}$$

(0.25 Punkte)

Zähler und Nenner werden gleichnamig gemacht

$$x_{1,\mathrm{s}} = \frac{k_3 \cdot u_{3,\mathrm{s}} \cdot u_{1,\mathrm{s}}(\frac{k_2 \cdot k_1 + k_1 \cdot k_1 - k_2 \cdot k_1}{k_1 - k_2})}{k_1 \cdot \frac{q \cdot k_1}{k_1 - k_2}} \tag{17}$$

(0.5 Punkte)

und nach Kürzen des Doppelbruchs und vereinfachen ergibt sich

$$x_{1,\mathrm{s}} = \frac{k_3 \cdot u_{1,\mathrm{s}} \cdot u_{3,\mathrm{s}}}{k_2} \tag{18}$$

(0.25 Punkte)

2. Aufgabe (7,5 Punkte)

Aufgabenstellung:

Die Dynamik einer Regelstrecke sei durch die folgende Übertragungsfunktion beschrieben

$$G_S(s) = \frac{(3s+3)^2}{(s-1)(s^2-s+4.25)} \; .$$

a) (*3,5 Punkte*) Gegeben sei der Regler

$$G_R(s) = \frac{s+2}{T_I\, s} \quad \text{mit} \quad T_I > 0 \; .$$

Zeichnen Sie die Wurzelortskurve von $G_0(s)$. Geben Sie die Asymptotenwinkel φ_i,den Wurzelschwerpunkt σ_w sowie die Pole, Nullstellen und den Verstärkungsfaktor des offenen Regelkreises explizit an.

b) (*4 Punkte*) Geben Sie den Bereich aller Werte der Reglerzeitkonstante T_I an, für welchen der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist.

Musterlösung:

a) **0.5 Punkte:** Der offene Regelkreis besitzt $n = 4$ Polstellen und $m = 3$ Nullstellen bei

$$p_1 = 0\,, \qquad p_2 = 1\,, \qquad p_3 = 0.5 + 2j\,, \qquad p_4 = 0.5 - 2j \tag{19}$$
$$n_1 = -2\,, \qquad n_2 = -1\,, \qquad n_3 = -1\,. \tag{20}$$

0.5 Punkte: Der Zusammenhang zwischen T_I und dem Verstärkungsfaktor des offenen Regelkreises K ergibt sich mit

$$G_0(s) = K \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m}(s - n_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} \tag{21}$$
$$G_0(s) = \left(\frac{9}{T_I}\right) \cdot \frac{(s+2)(s+1)(s+1)}{(s-0)(s-1)(s-0.5-2j)(s-0.5+2j)} \tag{22}$$

zu

$$T_I = \frac{9}{K}\,. \tag{23}$$

0.25 Punkte: Berechnung Wurzelschwerpunkt.

$$\sigma_W = \frac{\sum_{j=1}^{n} Re\{p_j\} - \sum_{i=1}^{m} Re\{n_i\}}{n - m} = 6 \tag{24}$$

0.25 Punkte: Berechnung der $n - m = 1$ Asymptotenwinkel. Mit

$$\varphi_i = (2i + 1)\frac{\pi}{n - m}\;, \qquad i = 0, 1, ..., n - m - 1 \tag{25}$$

folgt

$$\varphi_0 = \pi\,. \tag{26}$$

2 Punkte: Zeichnen der Wurzelortskurve (Pole (x), Nullstellen (o), Äste mit Richtungspfeilen, Asymptoten mit σ_w, Achsenbeschriftung, s-Ebene oder $G_0(s)$).

b) **0.5 Punkte:** Ablesen von $s_{\text{krit},1} = 3i$ und $s_{\text{krit},2} = 0.5i$.

2 Punkte: Berechnung von $K_{\text{krit},\xi}$, $\xi = 1, 2$ mit

$$K_{\text{krit},\xi} = \frac{\prod_{i=1}^{n} |(s_{\text{krit},\xi} - p_i)|}{\prod_{j=1}^{m} |(s_{\text{krit},\xi} - n_j)|} \tag{27}$$

Es folgt

$$K_{P,\text{krit},1} \approx \;\; 1.4782 \tag{28}$$
$$K_{P,\text{krit},2} \approx \;\; 0.8745 \tag{29}$$

0.5 Punkte: Berechnung von $T_{I,\text{krit},\xi}$, $\xi = 1, 2$. Es folgt

$$T_{I,\text{krit},1} \approx \;\; 6.0885 \tag{30}$$
$$T_{I,\text{krit},2} \approx 10.2919 \tag{31}$$

1 Punkt: Der geschlossene Regelkreis ist für

$$T_I =]0,\, 6.0885[\tag{32}$$

asymptotisch stabil. (*Für die Angabe des Intervalls* $K =]1.4782,\, \infty[$ *gibt es nur 0.5 Punkte.*)

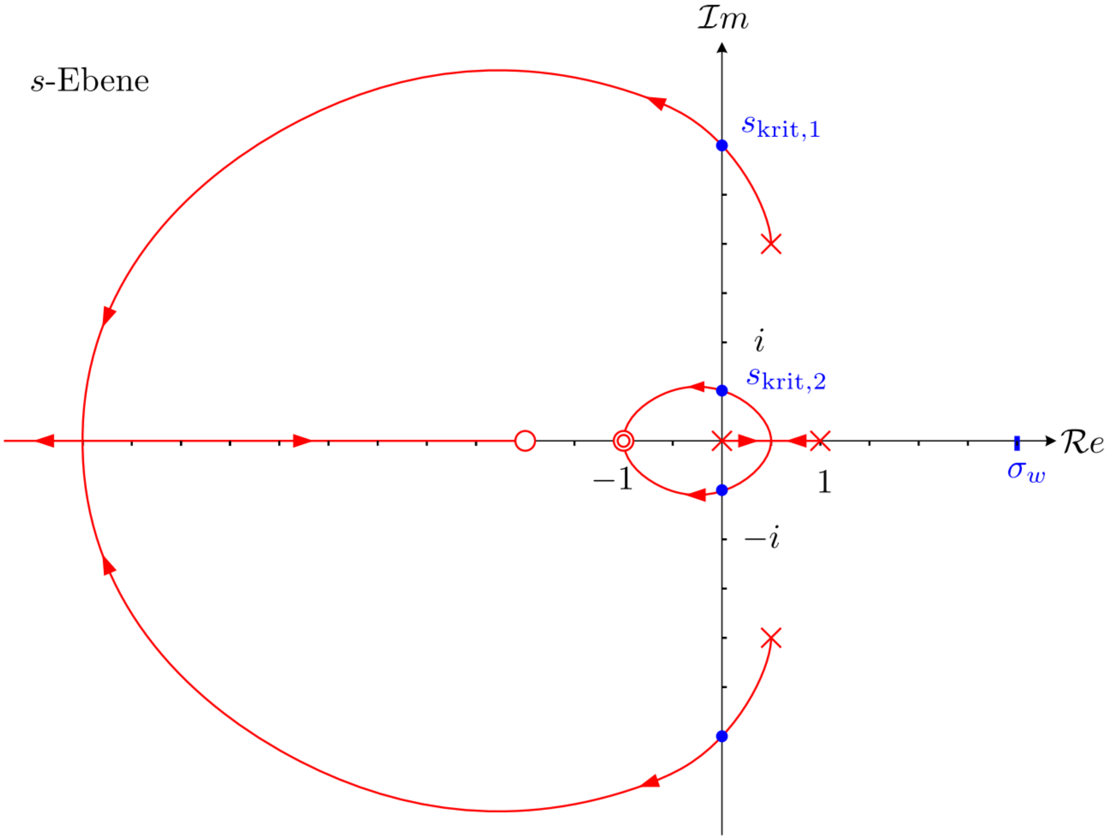


Abbildung 1: Wurzelortskurve aus Aufgabe 2.a).

3. Aufgabe (10 Punkte)

Sie haben die einzelnen Komponenten ihres Whirlpools separat identifiziert. Dafür hatten Sie die Methode von Schwarze und das Verfahren zur Bestimmung eines PT_1T_0 aus zwei Punkten genutzt. Die Übertragungsfunktion der gesamten Strecke ergab sich dann zu

$$G_S(s) = \frac{1}{(1+100\,s)^3}\frac{10}{(1+1000\,s)}.$$

a) *(1 Punkt)* Zerlegen Sie $G_S(s)$ in eine Serienschaltung von Standardregelkreisgliedern 1. Ordnung und geben Sie jeweils deren Name, Verstärkungsfaktor und Eckfrequenz an.

b) *(2 Punkte)* Zeichnen Sie die Frequenzgänge der ermittelten Standardregelkreisglieder in das beigefügte **Bodediagramm 1**. Sie können mehrfach auftretende Verläufe mit einem Kommentar kennzeichnen.

c) *(2 Punkte)* Zeichnen Sie die Gesamtstrecke G_S ebenfalls in das **Bodediagramm 1**.

Quereinstieg:
Sie entscheiden sich für einen kommerziellen PID-Regler, den Sie nun parametrieren müssen.
Als erste Näherung legen Sie den PID-Regler mit Hilfe von Einstellregeln für die beiden einzeln identifizierten Teilstrecken aus. Sie erhalten damit zwei Reglerentwürfe für die Gesamtstrecke, Regler 1 und Regler 2.
Die resultierenden offenen Regelkreise (System 1 und System 2) aus Regler und obiger Gesamtstrecke stehen als Zeichnung in **Bodediagramm 2** zur Verfügung. Die zugehörige Ortskurve ist auf der gleichen Seite aufgetragen. Gehen Sie für die folgende Aufgabe ausschließlich von dieser Zeichnung aus.

d) *(2 Punkte)* Markieren Sie die charakteristischen Punkte

- Durchtrittsfrequenz
- Schnittpunkte mit der reellen Achse

in den gegebenen Ortskurven.

Ermitteln Sie dann aus dem Frequenzgang die Werte von Betrag, Phase und Frequenz der markierten Punkte und geben Sie sie in einer Tabelle an.

e) *(2 Punkte)* Überprüfen Sie anhand des Nyquistkriteriums die Stabilität der beiden geschlossenen Regelkreise (System 1 und System 2) und geben Sie die jeweilige Phasen- und Amplitudenreserve für beide Vorschläge an.

f) *(1 Punkt)* In Bodediagramm 3 ist der offene Regelkreis eines weiteren Vorschlags (System 3) dargestellt. Welcher Satz Reglerparameter ist für eine schnelle Regelung am besten geeignet, der von System 1, System 2 oder System 3?

Begründen Sie Ihre Wahl in Hinblick auf Geschwindigkeit und Robustheit des Reglers.

Musterlösung 3. Aufgabe (10 Punkte)

a) **1 Punkte:**

$$G_S(s) = \underbrace{10}_{P} \cdot \underbrace{\frac{1}{100s+1}}_{PT_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{100s+1}}_{PT_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{100s+1}}_{PT_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1000s+1}}_{PT_1}$$

0.25 Punkte: für P-Glied oder ein PT1, **0.5 Punkte:** für drei mal PT1-Glied, **0.25 Punkte:** für restliches T1 Glied mit korrekten Eckfrequenzen (1/100 und 1/1000)

b) **2 Punkte:**

Amplitudengang

0.25 Punkte: P-Glied, **0.25 Punkte:** Sys1 , **0.25 Punkte:** Sys2 als 1 PT1, **0.25 Punkte:** mit Kommentar dass 3fach.

Phasengang

0.25 Punkte: P-Glied, **0.25 Punkte:** Sys1 , **0.25 Punkte:** Sys2 als 1 PT1, **0.25 Punkte:** mit Kommentar dass 3fach.

c) **2 Punkte:**

Amplitudengang

0.25 Punkte: Bereich bis 1e-3, **0.25 Punkte:** Bereich bis 1e-2, **0.25 Punkte:** Bereich bis 1e-1, **0.25 Punkte:** Bereich bis 1e0

Phasengang

0.25 Punkte: Bereich bis 1e-3, **0.25 Punkte:** Bereich bis 1e-2, **0.25 Punkte:** Bereich bis 1e-1, **0.25 Punkte:** Bereich bis 1e0

d) Charakteristische Punkte **2 Punkte:**

Im Nyquistdiagramm markiert	ω/rad/s	ϕ	$\lvert G(s)\rvert$
Schnittpunkt mit RE System 1	$6 \cdot 10^{-3} \pm 0.5 \cdot 10^{-3}$	**-180°**	3.7 dB ± 3 dB
Durchtrittsfrequenz System 1	$7.5 \cdot 10^{-3} \pm 1 \cdot 10^{-3}$	-186°± 5°	**1**
Schnittpunkt mit RE System 2	$4 \cdot 10^{-3} \pm 0.5 \cdot 10^{-3}$	**-180°**	−21 dB ± 3 dB
Durchtrittsfrequenz System 2	$9 \cdot 10^{-4} \pm 1 \cdot 10^{-4}$	-133°± 5°	**1**

0.25 Punkte: Für korrekte Frequenz dazu (**1 Punkt:** insgesamt)

0.25 Punkte: Jeweils fehlender Punkt (Phase oder Amplitude) (**1 Punkt:** insgesamt)

e) Nyquistkriterium **0,25 Punkte:** $m_0 = 0$ instabile Wurzeln/Pole und $l_0 = 1$ Integratorpole, weil PID-Regler . **0,25 Punkte:** Bedingung für asympt. Stabilität lautet:

$$\Delta\phi_{soll} = m_0\pi + l_0\frac{\pi}{2} = 0\pi + 1\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

0,25 Punkte: Aus Ortskurve folgt $\Delta\phi_{ist,1} = \frac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow$ Regelkreis mit System 1 instabil.

0,25 Punkte: Aus Ortskurve folgt $\Delta\phi_{ist,2} = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ Regelkreis mit System 2 stabil.

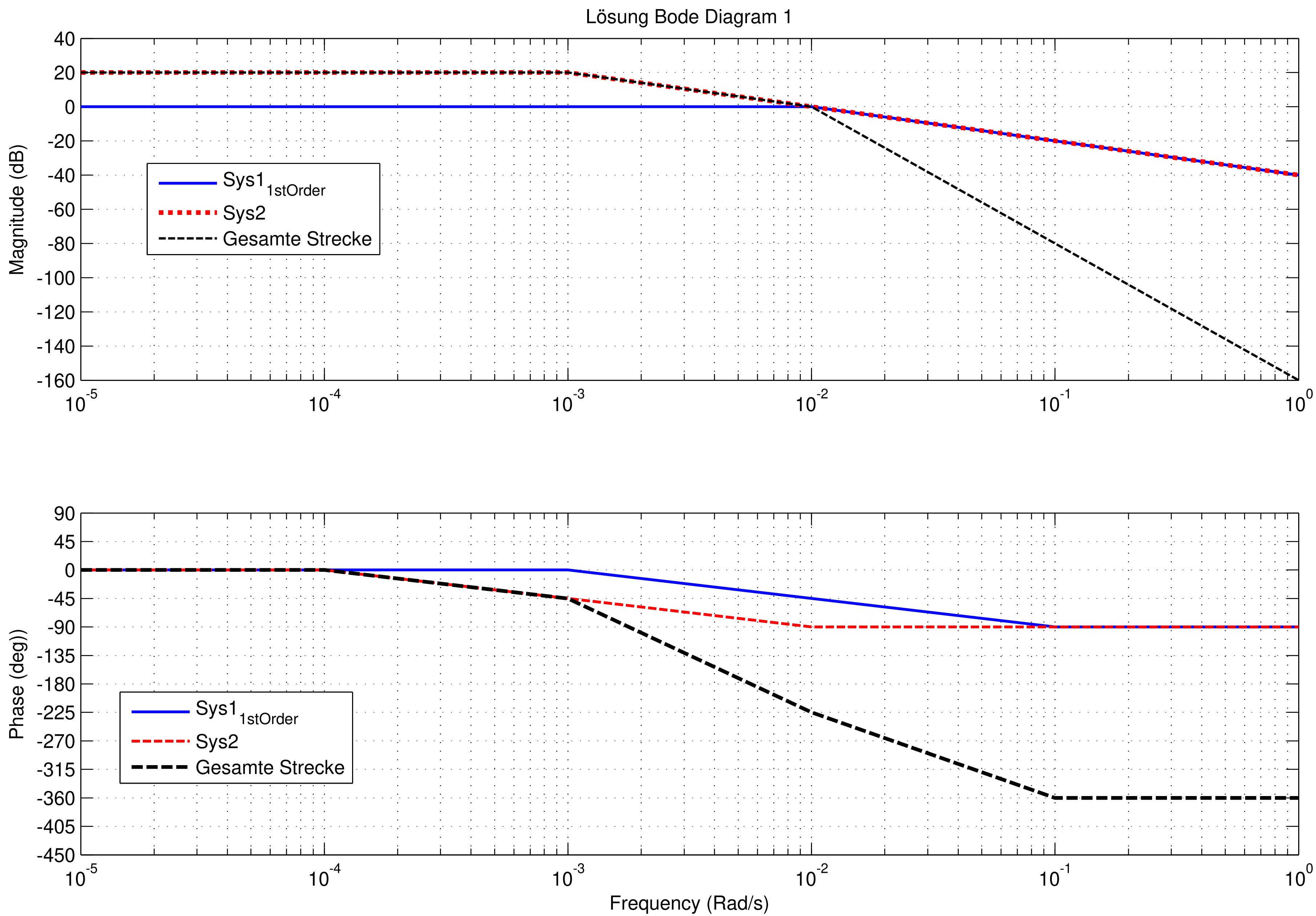
0,25 Punkte: Phasenreserve System 1 $\phi_R = -6°$± 5° aus Bodediagramm.

0,25 Punkte: Phasenreserve System 2 $\phi_R = 47°$± 5° aus Bodediagramm.

0,25 Punkte: Amplitudenreserve System 1 $\phi_R = -4$dB± 3dB aus Bodediagramm.

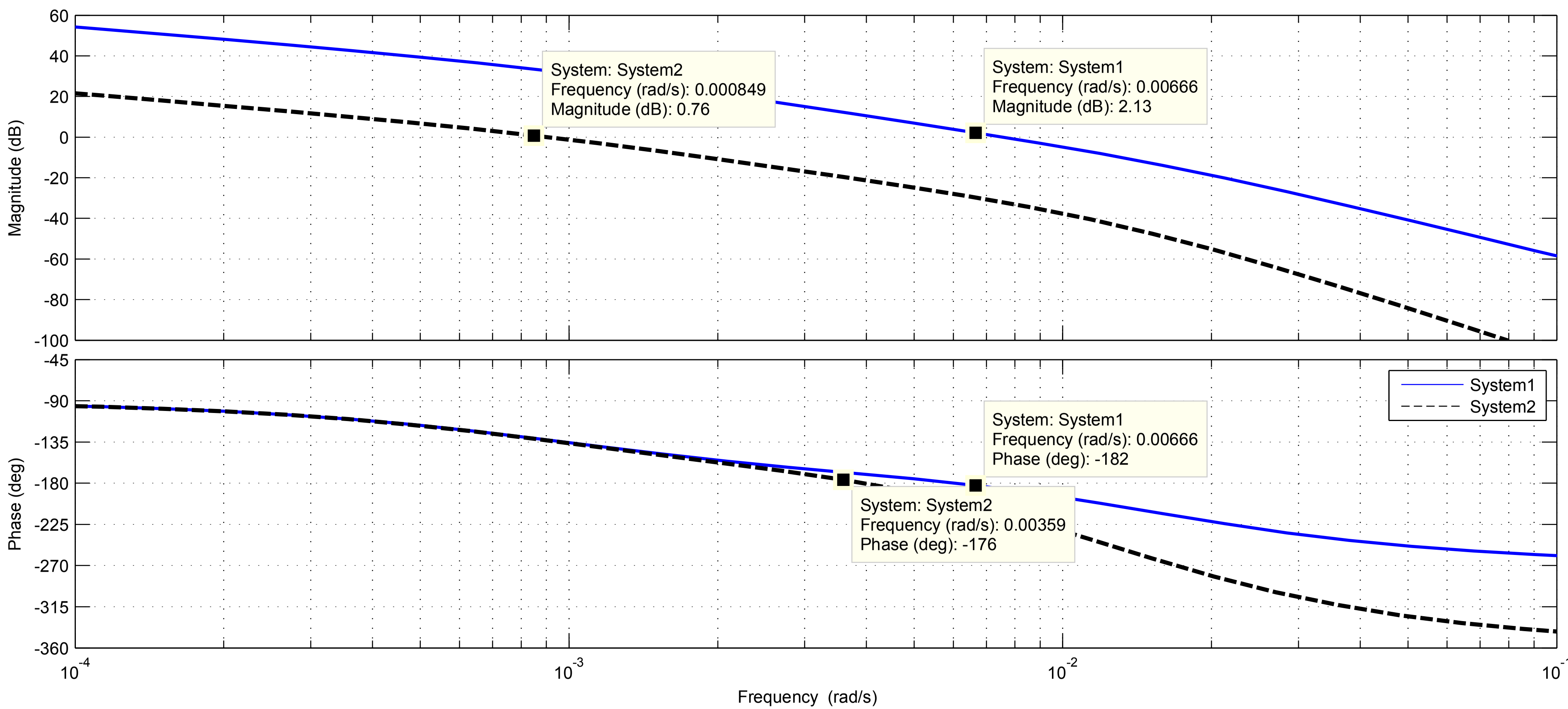
0,25 Punkte: Amplitudenreserve System 2 $\phi_R = 21$dB± 3dB aus Bodediagramm.

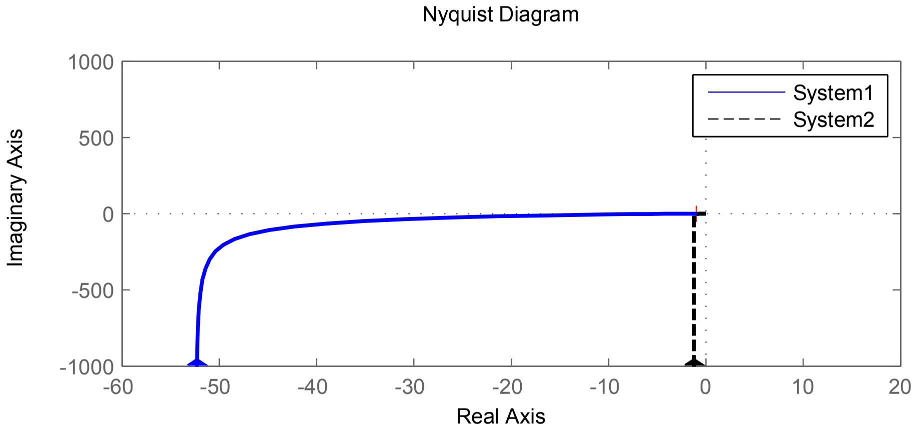
f) **0,25 Punkte:** System 1 ist instabil und daher ungeeignet. **0.5 Punkt:** System 3 ist das Beste, weil es eine deutlich höhere Bandbreite hat als System 2 und damit schneller reagiert. **0,25 Punkte:** Dabei hat System 3 wie auch System 2 eine ausreichend große Phasen- und Amplitudenreserve.

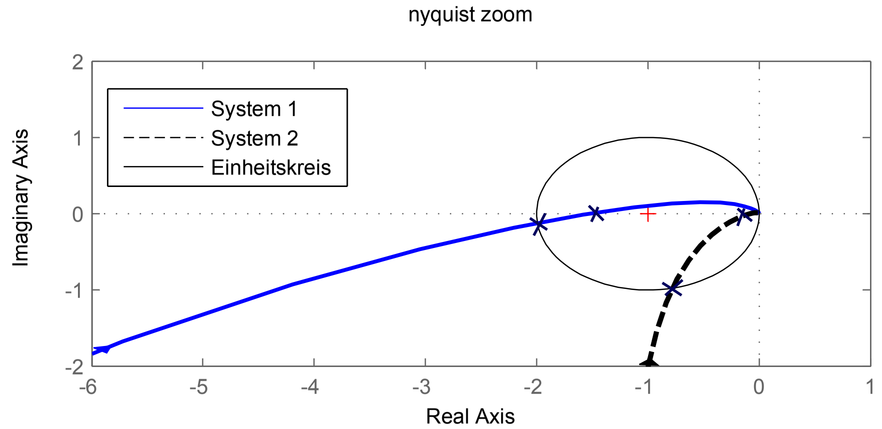


Lösung Bode Diagram 1
Magnitude (dB)
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
Sys1$_{1stOrder}$
Sys2
Gesamte Strecke
Phase (deg))
90
45
0
-45
-90
-135
-180
-225
-270
-315
-360
-405
-450
10^{-5}
10^{-4}
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
Frequency (Rad/s)

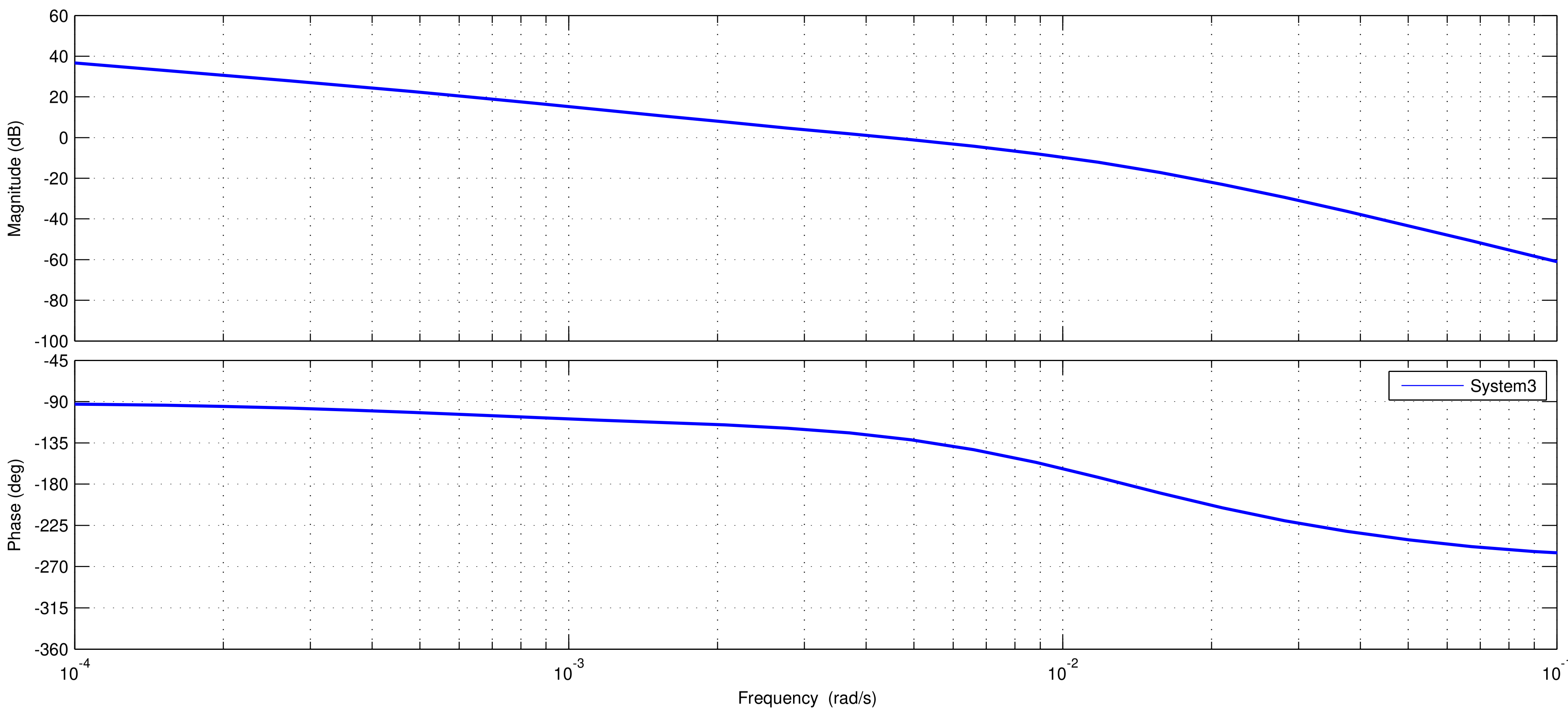
Aufgabe 3 - Bodediagram 2 - Studentenname:

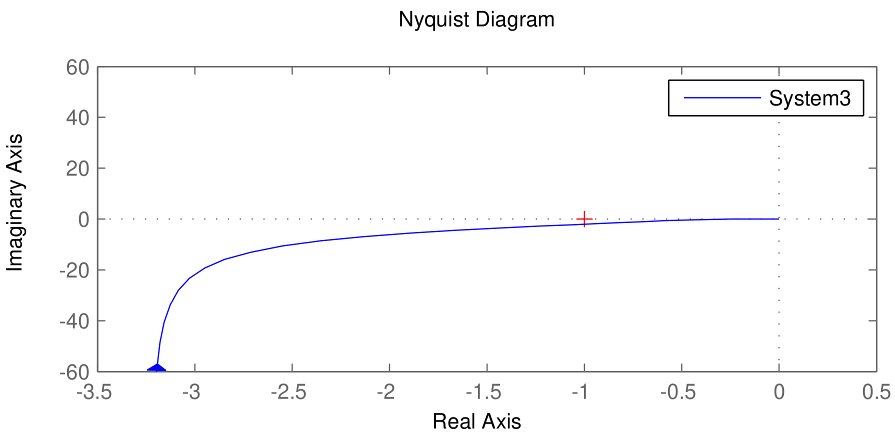


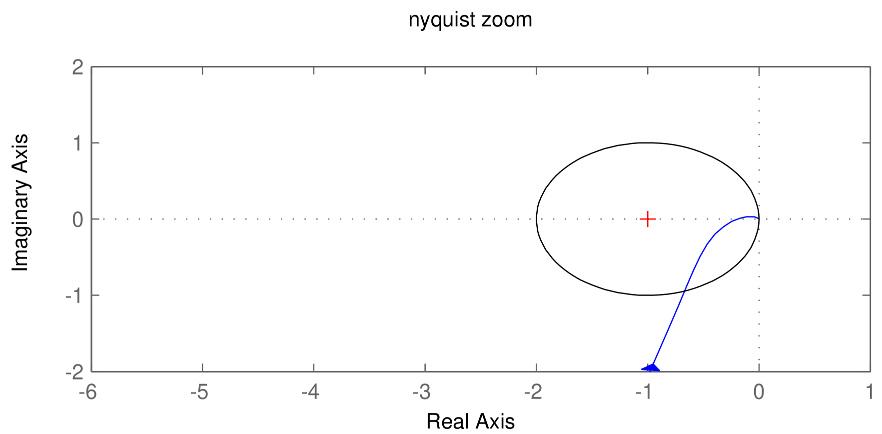




Aufgabe 3 - Bodediagram 3 - nur Qualitativ bewerten - Studentenname:







4. Aufgabe (10,5 Punkte)

Die Dynamik des in Abbildung 2 dargestellten Zweimassenschwingers wird durch das Differentialgleichungssystem

$$m\,\ddot{x}_1(t) = c\left(x_2(t) - x_1(t)\right) + h\left(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\right)$$
$$m\,\ddot{x}_2(t) = c\left(x_1(t) - x_2(t)\right) + h\left(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\right) + F(t)$$

beschrieben. Die Anfangsbedingungen seien

$$x_1(0) = x_2(0) = x_0$$
$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_0.$$

Hierbei stellt m die Einzelmasse der beiden schwingenden Körper dar. Die Federkonstante sei c und die Dämpferkonstante sei h. Das System wird durch die Kraft $F(t)$ angeregt.

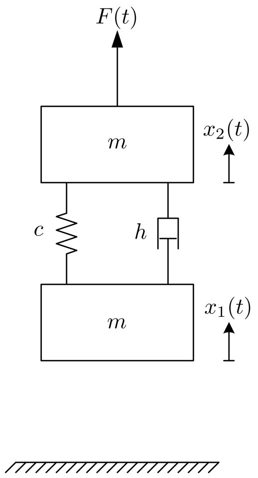


Abbildung 2: Zweimassenschwinger.

a) (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die Gleichungen des Zustandsraummodells des Zweimassenschwingers. Wählen sie hierfür zunächst einen geeigneten Zustandsvektors $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, wobei n der Systemordnung entspricht. Zur Positionsmessung steht Ihnen ein Abstandssensor zur Verfügung. Sie können ihn nutzen, um den Abstand des unteren Körpers zur Wand zu messen oder die Summe der Abstände beider Körper zur Wand zu messen. Geben Sie die Werte für $\mathbf{A}$, $\underline{b}$, $\underline{c}^T$, d des Zustandsraummodells für beide Sensorkonfigurationen an.

b) (*3 Punkte*) Welche Sensorkonfigurationen würden Sie empfehlen? Begründen sie!

c) (*3.5 Punkte*) **Quereinstieg:** Rechnen Sie in jedem Fall mit dem folgendem Zustandsraummodell weiter

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{-h}{m} & \frac{-c}{m} & \frac{c}{m} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{h}{m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)\ , \qquad \underline{x}(0) = \underline{x}_0\,,$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t)\,.$$

Für die Regelung soll der Zustandsregler $\underline{k}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{c}{h} \end{pmatrix}$ und ein Luenberger-Beobachter $\underline{l}$ verwendet werden. Mit welchem Vorfilter können Sie stationäre Genauigkeit erreichen? Legen Sie das entsprechende Glied aus.

Skizzieren Sie das Blockschaltbild des gesamten Regelungssystems und beschriften Sie die Signalpfade. Die Regelstrecke soll hierbei als eigenständiger Block eingezeichnet werden werden.

Musterlösung:

a) **3.5 Punkte:** Die Systemordnung ist $n = 4$. Ein geeigneter Zustandsvektor lautet somit

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} . \tag{33}$$

Mit $u(t) = F(t)$ ergibt sich das Zustandsraummodell zu

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c/m & -h/m & c/m & h/m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c/m & h/m & -c/m & -h/m \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m \end{pmatrix}}_{\underline{b}} u(t) \tag{34}$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{c}_1^T} \underline{x}(t) + \underbrace{(0)}_{d} u(t) \tag{35}$$

$$\tag{36}$$

beziehungsweise:

$$y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{c}_2^T} \underline{x}(t) + \underbrace{(0)}_{d} u(t) \tag{37}$$

0.5 Punkte: mit der Anfangsbedingung

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} . \tag{38}$$

b) **1.25 Punkte:** Die Beobachtbarkeitsmatrizen lauten

$$\mathbf{Q}_{B,1} = \begin{pmatrix} \underline{c}_1^T \\ \underline{c}_1^T \mathbf{A} \\ \underline{c}_1^T \mathbf{A^2} \\ \underline{c}_1^T \mathbf{A^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{39}$$

beziwehungsweise:

$$\mathbf{Q}_{B,2} = \begin{pmatrix} \underline{c}_2^T \\ \underline{c}_2^T \mathbf{A} \\ \underline{c}_2^T \mathbf{A^2} \\ \underline{c}_2^T \mathbf{A^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c/m & -h/m & c/m & h/m \\ 2ch/m^2 & 2h^2/m^2 - c/m & -2ch/m^2 & -2h^2/m^2 + c/m \end{pmatrix} . \tag{40}$$

1.25 Punkte: Die Determinanten von $\mathbf{Q}_B$ ergeben sich zu

$$|\mathbf{Q}_{B,1}| = 0 \tag{41}$$
$$|\mathbf{Q}_{B,2}| = c^2/m^2 . \tag{42}$$

0.5 Punkte: Um volle Beobachtbarkeit zu haben muss der Sensor den Abstand des unteren Körpers zur Wand messen.

c) **3 Punkte:** korrekte Antwort: mit keinem stationären Vorfilter! Der geschlossene RK ist grenzstabil.
1.5 Punkte: provozierte Antwort: Für stationäre Genauigkeit wird ein Vorfilter benötigt. Es berechnet sich zu:

$$m = -\left[\underline{c}^T \mathbf{A_g}^{-1} \underline{b}\right]^{-1} \tag{43}$$

$$m = -\left[\underline{c}^T \left(\mathbf{A} - \underline{b}\underline{k}^T\right)^{-1} \underline{b}\right]^{-1} \tag{44}$$

$$m = -\left[\underline{c}^T \begin{pmatrix} 0 & \frac{-c}{m} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{c}{h} \end{pmatrix}^{-1} \underline{b}\right]^{-1} \tag{45}$$

$$m = -\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-m}{c} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h}{c} & \frac{-h}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{h}{m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \tag{46}$$

$$m = \frac{c}{h}\,. \tag{47}$$

Das Blockschaltbild ist in Abbildung dargestellt.

- **0.25 Punkte:** Beobachter-Modell $\mathbf{A}, \underline{b}, \underline{c}^T$ korrekt skizziert.
- **0.25 Punkte:** Beobachter-Ausgangsfehlerrückführung $\underline{l}$ korrekt skizziert.
- **0.25 Punkte:** Zustandsregler $\underline{k}^T$ korrekt skizziert.
- **0.25 Punkte:** Stationäres Vorfilter m korrekt skizziert.
- **0.25 Punkte:** Reale Regelstrecke korrekt skizziert.
- **0.25 Punkte:** Signale $\hat{x}, \dot{\hat{x}}, \hat{x}_0$ korrekt angegeben.
- **0.25 Punkte:** Signale $y, \hat{y}$ korrekt angegeben.
- **0.25 Punkte:** Signale u, w korrekt angegeben.

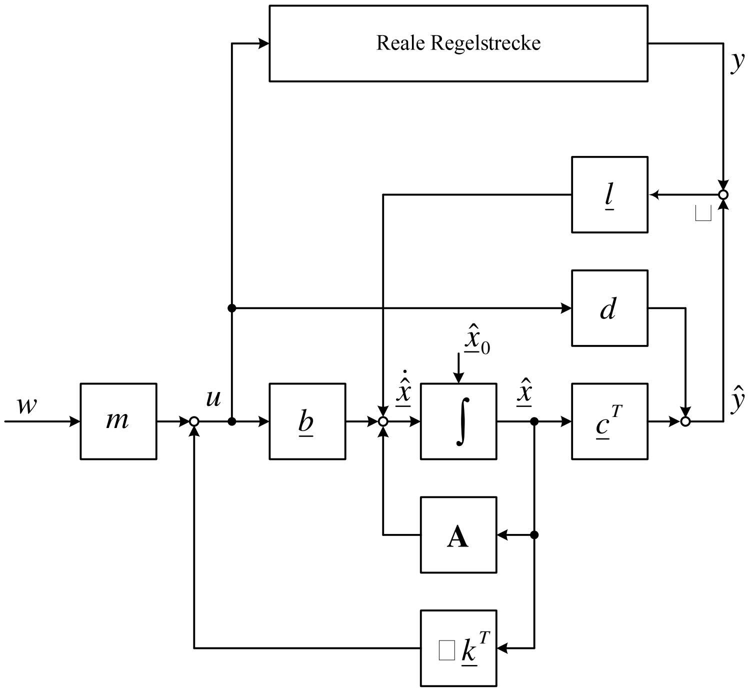


Abbildung 3: Lösung Aufgabe 3.

5. Aufgabe (5 Punkte)

Gegeben sei die folgende elektrische Schaltung:

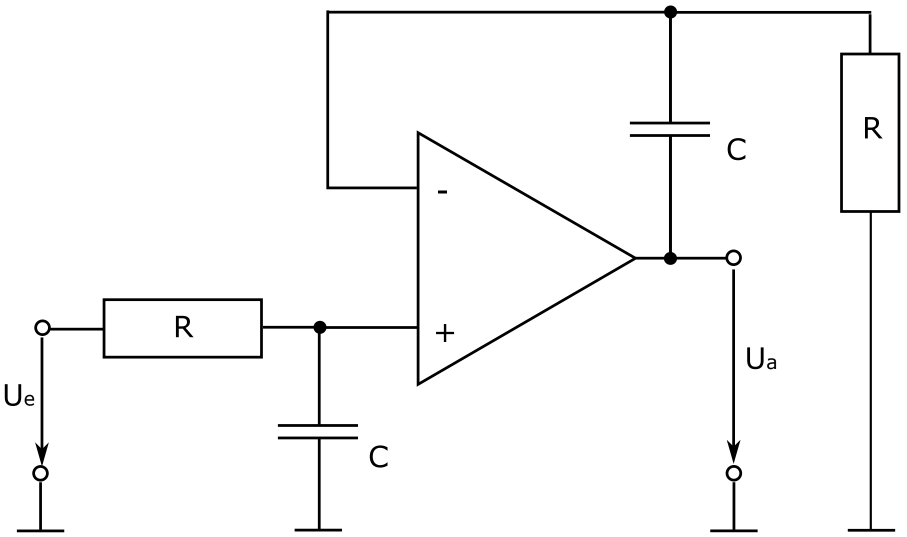


Abbildung 4: Elektrische Schaltung mit Operationsverstärker

a) *(2 Punkte)* Nutzen Sie die Kirchhoff'schen Gesetze, um das Übertragungsverhalten $G(j\omega) = U_a(j\omega)/U_e(j\omega)$ der vorliegenden elektrischen Schaltung zu bestimmen. Der Operationsverstärker kann als ideal angenommen werden. Alle Kondensatoren und alle Widerstände haben jeweils die gleichen Werte.

b) *(2 Punkte)* Überführen Sie die gegebene Schaltung in den Laplace-Bereich und beschreiben Sie die Zeitkonstanten in Abhängigkeit der elektrischen Bauteile R und C. Um welches Regelkreisglied handelt es sich bei der vorliegenden Schaltung?

   Berechnen Sie die Sprungantwort des Systems im Zeitbereich.

c) *(1 Punkt)* Legen Sie Werte für die Widerstände R und die Kondensatoren C so fest, dass die Verstärkung der Schaltung bei einer Frequenz von 1 Hz Zwölf beträgt.

Musterlösung

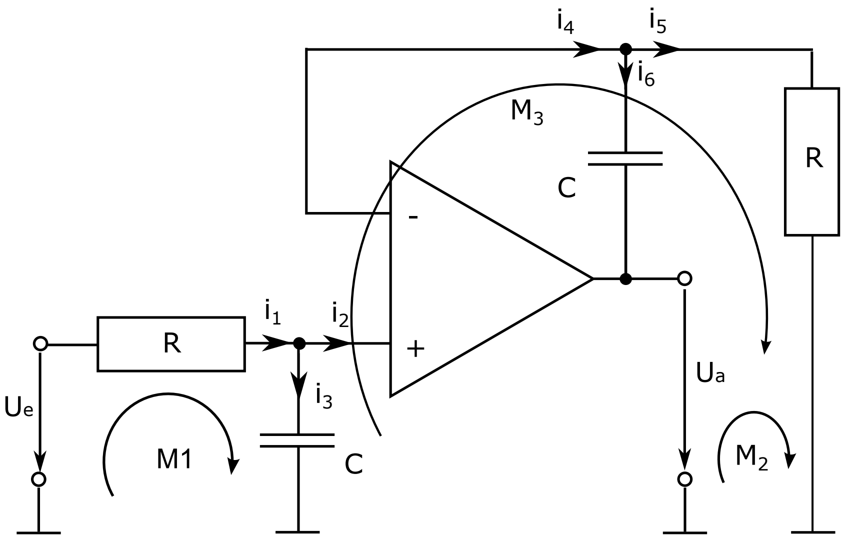


Abbildung 5: Elektrische Schaltung mit Operationsverstärker, Lösung

a) *(2 Punkte)*
Idealer OPV, d.h. $i_2 = i_4 = 0$. Daraus folgt: $i_1 = i_3$ und $i_5 = -i_6$
0.5 Punkte pro richtiger Masche, *0.5 Punkte* für richtiges Endergebnis
Masche 1:

$$U_e = (R + \frac{1}{j\omega C})i_1 \qquad \rightarrow \qquad i_1 = \frac{U_e}{R + \frac{1}{j\omega C}} \tag{48}$$

Masche 2:

$$U_a = (R + \frac{1}{j\omega C})i_5 \qquad \rightarrow \qquad i_5 = \frac{U_a}{R + \frac{1}{j\omega C}} \tag{49}$$

Masche 3:

$$i_1 \frac{1}{j\omega C} = R i_5 \tag{50}$$

M1 und M2 in M3 eingesetzt:

$$\frac{U_a}{U_e} = G(j\omega) = \frac{1}{RCj\omega} \tag{51}$$

b) *(2 Punkte)*

0.5 Punkte:

$$G(s) = \frac{1}{T_I s} \qquad T_I = RC \tag{52}$$

Bei der vorliegenden Schaltung handelt es sich um einen Integrator (I-Glied) *0.5 Punkte.*

1 Punkt: Die Sprungantwort lautet:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{T_I s} \cdot \frac{1}{s}\right\} = \frac{t}{T_I} \tag{53}$$

c) *(1 Punkt)*
Die frequenzabhängige Verstärkung beträgt:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{T_I \omega} \tag{54}$$

Gefordert wird:

$$|G(j\omega_1)| = \frac{1}{T_I \omega_1} = 12 \qquad mit \qquad \omega_1 = 2\pi f_1, \qquad f_1 = 1Hz \tag{55}$$

Daraus folgt:

$$T_I = \frac{1}{24\pi} = RC \tag{56}$$

Wähle R=10kΩ und C=1.33μF.