„Grundlagen der Mess- und Regelungstechnik“
Prüfung Sommersemester 2018
Teil 1: Theorieteil

9 LP

29. August 2018

Bearbeitungszeit : 50 Min

erlaubte Hilfsmittel: keine

Name, Vorname: ______________________________

Matr. Nr: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Abschluss: ○ Bachelor ○ Master ○ Diplom

GMRT-Übungsschein im Wintersemester 20___/___ erhalten.

	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
Σ Theorieteil	22	

Begründen/Erläutern Sie Ihre Antworten mit wenigen Worten.

a) (*1 Punkt*) Nennen Sie drei typische Ziele einer Regelung

b) (*1 Punkt*) Geben Sie die Übertragungsfunktion eines DIT1-Glieds an.

c) (*1 Punkt*) Unter welchen Bedingungen können Windup-Effekte auftreten?

d) (*2 Punkte*) Was können Sie über die Stabilität von

$$G_S(s) = \frac{(1-s)(0.1+s)}{(s^2+0.1s)}$$

sagen? Ist diese Strecke für eine Reglerauslegung mit der direkten Vorgabe geeignet?

e) (*2 Punkte*) Warum reicht die Lage eines Pols nicht unbedingt aus, um seine Dominanz zu beschreiben?

f) (*2.5 Punkte*) Beschreiben Sie, wie man schnell einen PID-Regler auslegen kann. Was muss bei der Implementierung beachtet werden?

g) (*2 Punkte*) Die P-geregelte Strecke

$$G_S(s) = \frac{0.01}{(s+1)(100\,s+1)^2}$$

reagiert sehr langsam auf Führungsgrößensprünge. Kann die Dynamik beschleunigt werden durch eine Erhöhung des Verstärkungsfaktors?

h) (*3 Punkte*) Beschreiben Sie eine Reglerauslegung mit der Polvorgabe. Wie sollte die Lage der Pole des geschlossenen Regelkreises gewählt werden und warum?

i) (*1.5 Punkte*) Wie kann man den Frequenzgang eines Systems experimentell bestimmen? Geht dies auch für Allpass-Systeme?

j) (*2 Punkte*) Zwei verschiedene Maße für Robustheit sind Phasenreserve und Amplitudenreserve. Beschreiben Sie mit Skizzen, warum jedes für sich genommen nicht immer aussagekräftig ist. Was sollte daher gefordert werden?

k) (*1 Punkt*) Was ist der Vorteil des Kompensationsprinzips?

l) (*1 Punkt*) Was ist der Unterschied zwischen einem direkten und einem indirekten Messverfahren?

m) (*1 Punkt*) Nennen Sie zwei Methoden, wie man die Empfindlichkeit einer Sensoranordnung verdoppeln kann.

n) (*1 Punkt*) Es soll die Temperatur im Kessel einer haushaltsüblichen Warmwasserheizung gemessen werden, um eine Regelung aufzubauen. Welchen Sensor würden Sie verwenden und warum?

„Grundlagen der Mess- und Regelungstechnik“
Prüfung Sommersemester 2018
Teil 2: Rechenteil

9 LP

29. August 2018

Bearbeitungszeit: 120 Min

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, zwei beschriebene Blätter

Name, Vorname: ______________________________

Matr. Nr: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Abschluss: ○Bachelor ○Master ○Diplom

GMRT-Übungsschein im Wintersemester 20___/___ erhalten.

	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
Aufgabe 1	8	
Aufgabe 2	6	
Aufgabe 3	7	
Aufgabe 4	8	
Aufgabe 5	7	
Σ Rechenteil	36	

1. Aufgabe: Modellbildung (8 Punkte)

In einem vollständig durchmischten Reaktor (siehe Abb. 1) mit 20 mbar Überdruck und konstanter Füllhöhe reagieren die Stoffe A,B und C nach folgender stöchiometrischer Gleichung.

$$5\,A + 3\,B \longrightarrow 2\,C \tag{1}$$

Die Reaktion findet unvollständig statt, sodass A und B noch im Abfluss zu finden sind. Die Stoffumwandlung der Reaktion ist proportional zur Reaktionsrate r [mol/L/h].

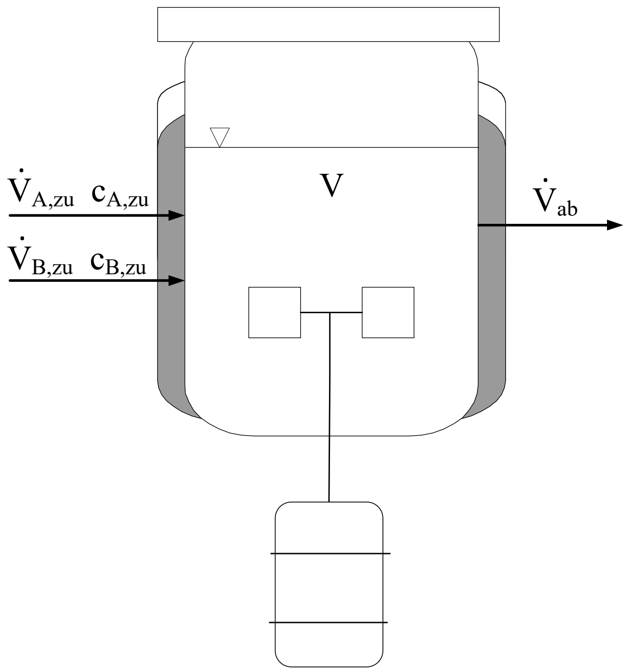

Abbildung 1: Reaktor

a) (*3 Punkte*) Stellen Sie über Stoffmengenbilanzen das Differentialgleichungssystem für die Stoffe B und C auf:

$$\dot{c}_B(t) = ...$$
$$\dot{c}_C(t) = ...$$

Quereinstieg: Rechnen Sie mit den folgenden dimensionslosen Gleichungen weiter.

$$\dot{c}_1(t) = c_{1,\text{zu}}\,u(t) - c_1(t)\,u(t) - \beta\,e^{-\alpha\,c_1(t)} \tag{2}$$

$$\dot{c}_2(t) = 3\,\beta\,e^{-\alpha\,c_1(t)\,c_2(t)} - c_2(t)\,u(t) \tag{3}$$

b) (*2 Punkte*) Linearisieren Sie das Differentialgleichungssystem mit den Größen

$$\Delta c_1 = c_1(t) - c_{1,\text{s}}$$
$$\Delta c_2 = c_2(t) - c_{2,\text{s}}$$
$$\Delta u = u(t) - u_\text{s} \quad .$$

Die Ruhelage soll nicht berechnet werden.

c) (*1.5 Punkte*) Überführen Sie die linearisierten Gleichungen in den Laplacebereich und berechnen Sie die Übertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$ und $G_3(s)$ der Gleichungen

$$Y_1(s) = G_1(s)U(s) \tag{4}$$
$$Y_2(s) = G_3(s)Y_1(s) + G_2(s)U(s) \tag{5}$$

für verschwindende Anfangsbedingungen.

Hinweis:
Es ist

$$Y_1(s) = \mathcal{L}\{\Delta c_1(t)\}$$
$$Y_2(s) = \mathcal{L}\{\Delta c_2(t)\}$$
$$U(s) = \mathcal{L}\{\Delta U(t)\}$$

Quereinstieg: Rechnen Sie mit folgender Gleichung weiter.

$$G_1(s) = \frac{2}{s+3} \tag{6}$$

d) (*1.5 Punkte*) Welche Ausgangsgröße $\Delta c_1(t_1)$ liegt zum Zeitpunkt $t_1 = 2$ vor, wenn das System mit dem Einheitssprung angeregt wird?

Hinweis: Verwenden Sie das Faltungsintegral und die Laplace-Tabelle.

$$x_a(t) = \int_0^t x_e(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \tag{7}$$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
$\sigma(t)$ und 1	$\frac{1}{s}$
t^n , $n = 1, 2, ..$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n\, e^{-at}$, $n = 0, 1, 2, ..$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$

1. Aufgabe Musterlösung [Σ 8 Pkte]

a) [Σ 3 Pkte]

$$\frac{\partial c_B}{\partial t} = \frac{\dot{V}_{\mathrm{B,zu}} \cdot c_{B,zu}}{V} - \frac{(\dot{V}_{\mathrm{A,zu}} + \dot{V}_{\mathrm{B,zu}}) \cdot c_B}{V} - 3 \cdot r \qquad [\mathbf{1.5\ Pkte}]$$

$$\frac{\partial c_C}{\partial t} = -\frac{(\dot{V}_{\mathrm{A,zu}} + \dot{V}_{\mathrm{B,zu}}) \cdot c_c}{V} - 2 \cdot r \qquad [\mathbf{1.5\ Pkte}]$$

b) [Σ 2 Pkte] Beide Gleichungen nach den variablen ableiten

$$\Delta \dot{c}_1 = \underbrace{-u_s + \beta \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot c_{1,s}}}_{K} \cdot \Delta c_1 + \underbrace{(c_{1,zu} - c_{1,s})}_{L} \cdot \Delta u \tag{8}$$

$$\Delta \dot{c}_2 = \underbrace{-3 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot e^{-\alpha \cdot c_{1,s}}}_{M} \cdot \Delta c_1 \underbrace{-u_s}_{N} \cdot \Delta c_2 \underbrace{-c_{2,s}}_{O} \cdot \Delta u \tag{9}$$

c) [Σ 1,5 Pkte]
Mit Beachtung der Ableitungsregel ergibt sich

$$s \cdot Y_1(s) = K \cdot Y_1(s) + L \cdot U(s) \qquad [\mathbf{0.5\ Pkte}]$$

$$s \cdot Y_2(s) = M \cdot Y_1(s) + N \cdot Y_2(s) + O \cdot U(s) \qquad [\mathbf{0.5\ Pkte}]$$

und

$$Y_1(s) = \underbrace{\frac{L}{s-K}}_{G_1(s)} \cdot U(s) \qquad [\mathbf{0.25\ Pkte}]$$

$$Y_2(s) = \underbrace{\frac{M}{s-N}}_{G_3(s)} \cdot Y_1(s) + \underbrace{\frac{O}{s-N}}_{G_2(s)} \cdot U(s) \qquad [\mathbf{0.25\ Pkte}]$$

d) [Σ 1,5 Pkte]
Mit Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt sich für die Gewichtsfunktion $g(t)$

$$L^{-1}\{G_1\} = 2 \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = 2 \cdot t^0 \cdot e^{-3t}. \qquad [\mathbf{0.25\ Pkte}]$$

Eingefügt in Faltungsintegral resultiert

$$\begin{aligned}
\Delta c_1(t_1) &= 2 \int_0^t e^{-3(t-\tau)} d\tau && [\mathbf{0.25\ Pkte}]\\
&= 2 \int_0^t e^{-3t} e^{3\tau} d\tau && [\mathbf{0.25\ Pkte}]\\
&= 2 \cdot \left(\frac{1}{3} e^{-3t} e^{3t} - \frac{1}{3} e^{-3t}\right) &&\\
&= \frac{2}{3} - \frac{2}{3} e^{-3t} && [\mathbf{0.25\ Pkte}]\\
\Delta c_1(t_1 = 2) &= \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{e^6}\right) && [\mathbf{0.25\ Pkte}]
\end{aligned}$$

2. Aufgabe: Zustandsraummodell (6 Punkte)

Aus der Modellbildung erhalten Sie Differentialgleichungen mit verschwindenden Anfangsbedingungen:

$$
\begin{aligned}
0 &= \ddot{\alpha}(t) - \dot{\alpha}(t) + u(t) \quad , \\
0 &= \ddot{\beta}(t) - \dot{\alpha}(t) - \dot{\beta}(t) \quad .
\end{aligned}
$$

a) (*1.5 Punkte*) Bringen Sie die Gleichungen in die Form eines Zustandsraummodells ($\underline{\dot{x}}(t) = \mathbf{A}\,\underline{x}(t) + \underline{b}\,u(t)$). Verwenden Sie dabei den Zustandsvektor

$$
\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \dot{\alpha}(t) \\ \beta(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{bmatrix} \quad .
$$

b) (*0.5 Punkte*) Welche Ordnung hat das System?

c) (*0.5 Punkte*) Sie können einen Sensor verwenden, der in der Lage ist die Summe aus α und β zu messen. Wie lautet die zum Sensor zugehörige Messgleichung? Geben Sie die Gleichung in Form $y(t) = \underline{c}^T\,\underline{x}(t) + du(t)$ an.

Quereinstieg: Arbeiten Sie ab c) in jedem Fall mit folgendem System weiter:

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}}_{\underline{b}} u(t)
$$

mit $k \in \mathbb{R}$ und verschwindenden Anfangsbedingungen. Sie können aus baulichen Gründen zwischen zwei Sensoren wählen. Die Sensoren lassen sich beschreiben durch:

$$
\begin{aligned}
y_I(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{c}_I^T} \underline{x}(t) + \underbrace{0}_{d}\,u(t) \\
y_{II}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{c}_{II}^T} \underline{x}(t) + \underbrace{0}_{d}\,u(t)
\end{aligned}
$$

d) (*1.5 Punkte*) Begründen Sie welchen der beiden Sensoren Sie im System verbauen würden, gehen Sie dabei auch auf den Aspekt einer möglichen, aufzubauenden Zustandsreglung ein.

e) (*1 Punkt*) Unter welcher Bedingung für k ist das System steuerbar?

f) (*1 Punkt*) Geben Sie die Übertragungsfunktion an, die aus dem Zustandsraummodell resultiert, falls der erste Sensor (y_I) verwendet werden würde. Benennen Sie die Übertragungsfunktion.

2. Aufgabe Musterlösung [Σ 6 Pkte]

a) [Σ **1.5 Pkte**]

Aufstellen der vier Differentialgleichungen erster Ordnung, jeweils [**0.25 Pkte**] pro Gleichung:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_2 - u\\ \dot{x}_3 &= x_4\\ \dot{x}_4 &= x_2 + x_4\end{aligned}$$

Angabe von $\mathbf{A}$ und $\underline{b}$ jeweils [**0.25 Pkte**]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

b) [Σ **0,5 Pkt**] Die Systemordnung ist n=4 (siehe Zustandsvektor).
c) [Σ **0,5 Pkt**]

$$y(t) = x_1 + x_3 \Rightarrow y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{\underline{c}^T} \underline{x}(t) + \underbrace{0}_{d} u(t) \tag{10}$$

Jeweils [**0.25 Pkte**] für Angabe von $\underline{c}^T$ und d.
d) [Σ **1,5 Pkt**]
Bestimmung der Beobachtbarkeitsmatrix für jede der beiden Messgleichungen, jeweils [Σ **0,25 Pkt**]:

$$Q_{B,I} = \begin{bmatrix}\underline{c}_I^T\\ \underline{c}_I^T\mathbf{A}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$Q_{B,II} = \begin{bmatrix}\underline{c}_{II}^T\\ \underline{c}_{II}^T\mathbf{A}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Bestimmung des Rangs der Beobachtbarkeitsmatrizen, jeweils [Σ **0,25 Pkt**]:

$$det(Q_{B,I}) = 1 \Rightarrow Rang(Q_{B,I}) = 2 \Rightarrow \text{beobachtbar}$$
$$det(Q_{B,II}) = 0 \Rightarrow Rang(Q_{B,II}) < 2 \Rightarrow \text{nicht beobachtbar}$$

Da jeweils nur einer der beiden Zustände gemessen werden kann bei der gegebenen Auswahl an Sensoren, ist eine Schätzung des verbleibenden Zustands (durch einen Beobachter) notwendig um einen Zustandsregler aufzubauen. [Σ **0,25 Pkt**] Der erste Sensor sollte daher verwendet werden, da das System mit diesem beobachtbar ist. [Σ **0,25 Pkt**]
e) [Σ **1 Pkte**]
Bestimmung der Steuerbarkeitsmatrix [Σ **0,25 Pkt**]

$$Q_S = \begin{bmatrix}\underline{b} & \mathbf{A}\underline{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & k\\ k & k\end{bmatrix}$$

Bestimmung des Rangs der Steuerbarkeitsmatrix [Σ **0,25 Pkt**]:

$$det(Q_S) = -k^2$$

Das System ist steuerbar falls $Rang(Q_S) = 2$, dies bedeutet, dass k ungleich null sein muss. [Σ **0,5 Pkt**]
f) [Σ **1 Pkte**]
Angabe der Berechnungsvorschrift [Σ **0,25 Pkte**] (optional mit eingesetzten Werten):

$$G(s) = \underline{c}_I^T(sI - \mathbf{A})^{-1}\underline{b} + d = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s-1 & -1\\ 0 & s-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ k\end{bmatrix} + 0 \tag{11}$$

Inversion der Matrix [Σ **0,25 Pkte**]:

$$\begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Angabe der Übertragungsfunktion [Σ **0,25 Pkte**]:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-1)^2} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = \frac{k}{(s-1)^2} \tag{13}$$

Benennung der Übertragungsfunktion als PT2-Glied. [Σ **0,25 Pkte**]

3. Aufgabe: Wurzelortskurve (8 Punkte)

Die Abbildung 2 zeigt die Wurzelortskurve für ein System das mit einem P-Regler $G_k = K_p$ geregelt wird. Der Verstärkungsfaktor der Strecke G_s beträgt 1.

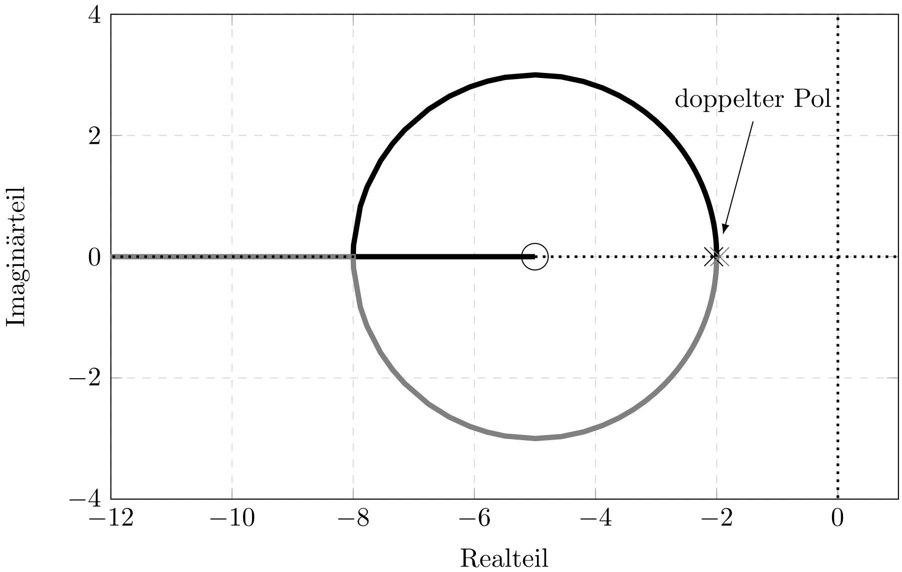

Abbildung 2: Wurzelortskurve für Aufgabe a), b) und c)

a) (*1 Punkt*) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_0 = G_k \cdot G_s$ des offenen Reglekreises.

b) (*2 Punkte*) Im Betrieb soll ein Schwingen des Systems möglichst vermieden werden. Wie groß muss der Verstärkungsfaktor K_p des Reglers gewählt werden um keine Schwingungen zu erhalten?

c) (*1 Punkt*) Da der Verstärkungsfaktor nicht beliebig groß gewählt werden kann, soll die Reglerstruktur so angepasst werden, dass die für die Schwingung verantwortlichen Pole nicht das Verhalten dominieren. Dabei soll nicht mehr als eine Polstelle und eine Nullstelle verwendet werden. Skizzieren Sie die die WOK der neuen Reglerstruktur.

Quereinstieg möglich

d) (*3 Punkte*) Ungünstigerweise ist die Reglerstruktur nicht frei wählbar. Als Möglichkeit steht nur der Regler $G_K = K_p \frac{s-n_1}{(s-p_1)(s-p_2)}$ zur Verfügung. Wählen Sie die Pole und Nullstellen so aus, dass wie zuvor bei kleinen Werten für K_p keine komplexen Polpaare existieren. Zeichnen Sie die neue Wurzelortskurve.

3. Aufgabe: Musterlösung

a) Die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises lautet (1P):

$$G_0(s) = \frac{s+5}{(s+2)^2} \tag{14}$$

b) Der Verstärkungsfaktor sollte mindestens $K_p = 12$ gewählt werden. (2P)

c) Abbildung 3 zeigt einen Lösungvorschlag. (1P)

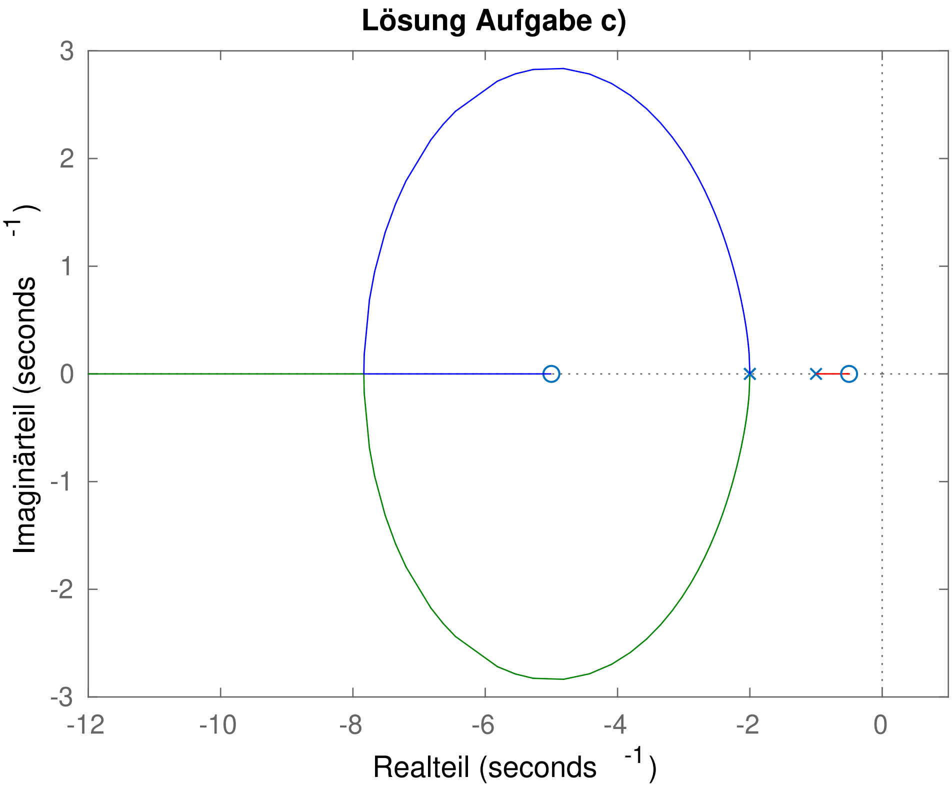

Abbildung 3: Lösung zu Aufgabenteil c)

d) Abbildung 4 zeigt einen Lösungsvorschlag. (3P)

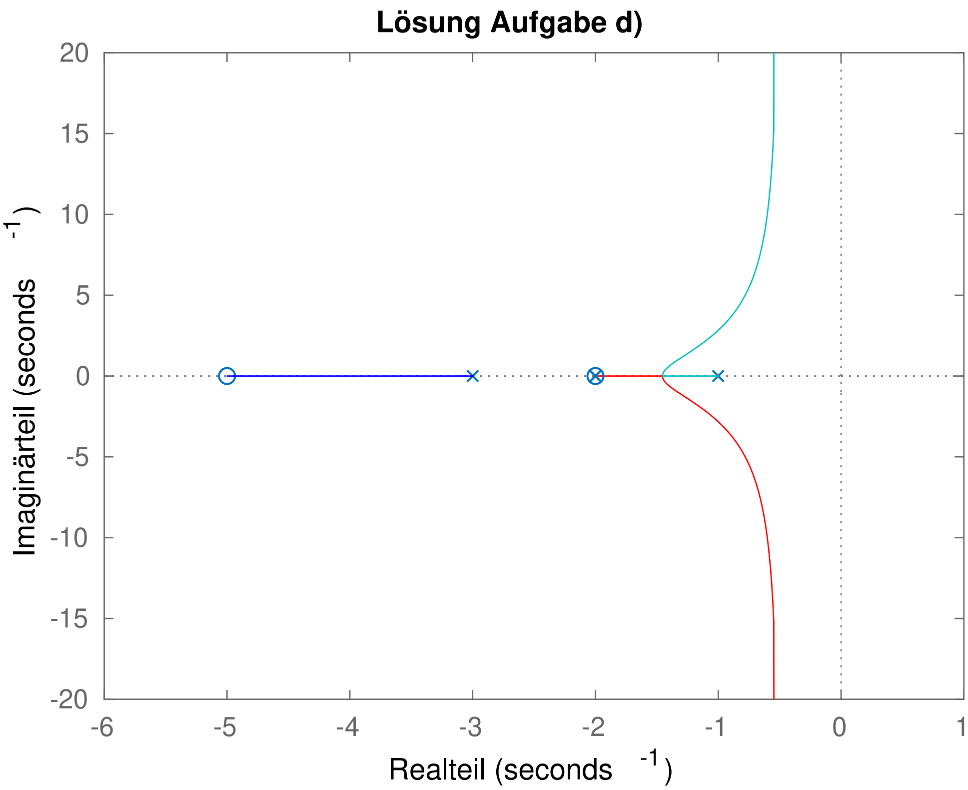

Abbildung 4: Lösung zu Aufgabenteil d)

4. Aufgabe: Frequenzgang (8 Punkte)

Ein System, das aus zwei Teilsystemen besteht, soll geregelt werden.

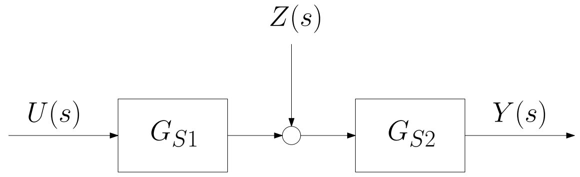

Abbildung 5: Blockschaltbild

Der Frequenzgang der ersten Teilstrecke G_{S1} wurde experimentell bestimmt und ist in Abbildung 6 dargestellt. Es wird angenommen, dass G_{S1} nur aus Standradregelkreisgliedern erster Ordnung zusammensetzt ist.
Die Übertragungsfunktion der Teilstrecke G_{S2} wurde über eine Modellbildung gefunden und lautet:

$$G_{S2}(s) = \frac{10}{1 + 10s}$$

a) (*1 Punkt*) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion von $G_{S1}(s)$ aus dem Bode-Diagramm in Abbildung 6. Benennen Sie die einzelnen Glieder und geben Sie die zugehörigen Zeitkonstanten und Verstärkungsfaktoren an.

b) (*1 Punkt*) Als ersten Reglerentwurf entscheiden Sie sich für einen P-Regler mit einer Verstärkung von 10. Zeichnen Sie den Frequenzgang von $G_{S2}(s)$ und von $G_0(s)$ in das Bode-Diagramm in Abbildung 6 ein.

c) (*2 Punkt*) Überprüfen Sie mit dem Nyqiustkriterium, ob der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist. Zeichnen Sie dazu qualitativ die Ortskurve der offenen Strecke und geben Sie Amplituden- und Phasenreserve sowie alle weiteren wichtigen Punkte an.

d) (*2 Punkt*) Markieren Sie im Bode-Diagramm die Phasen- und Amplitudenreserve des offenen Regelkreises und geben Sie diese an. Wählen Sie den Verstärkungsfaktor des P-Reglers K_p so, dass sich ungefähr eine Phasenreserve von 45° einstellt.

e) (*2 Punkt*) Der Regelkreis kann durch sprungförmige Störungen gestört werden. Wie werden Störungen auf die Regelgröße übertragen? Geben Sie die Störgrößenübertragungsfunktion für $K_p = 10$ an und berechnen Sie die stationäre Verstärkung der Störungsübertragungsfunktion $G_{yz}(s)$.

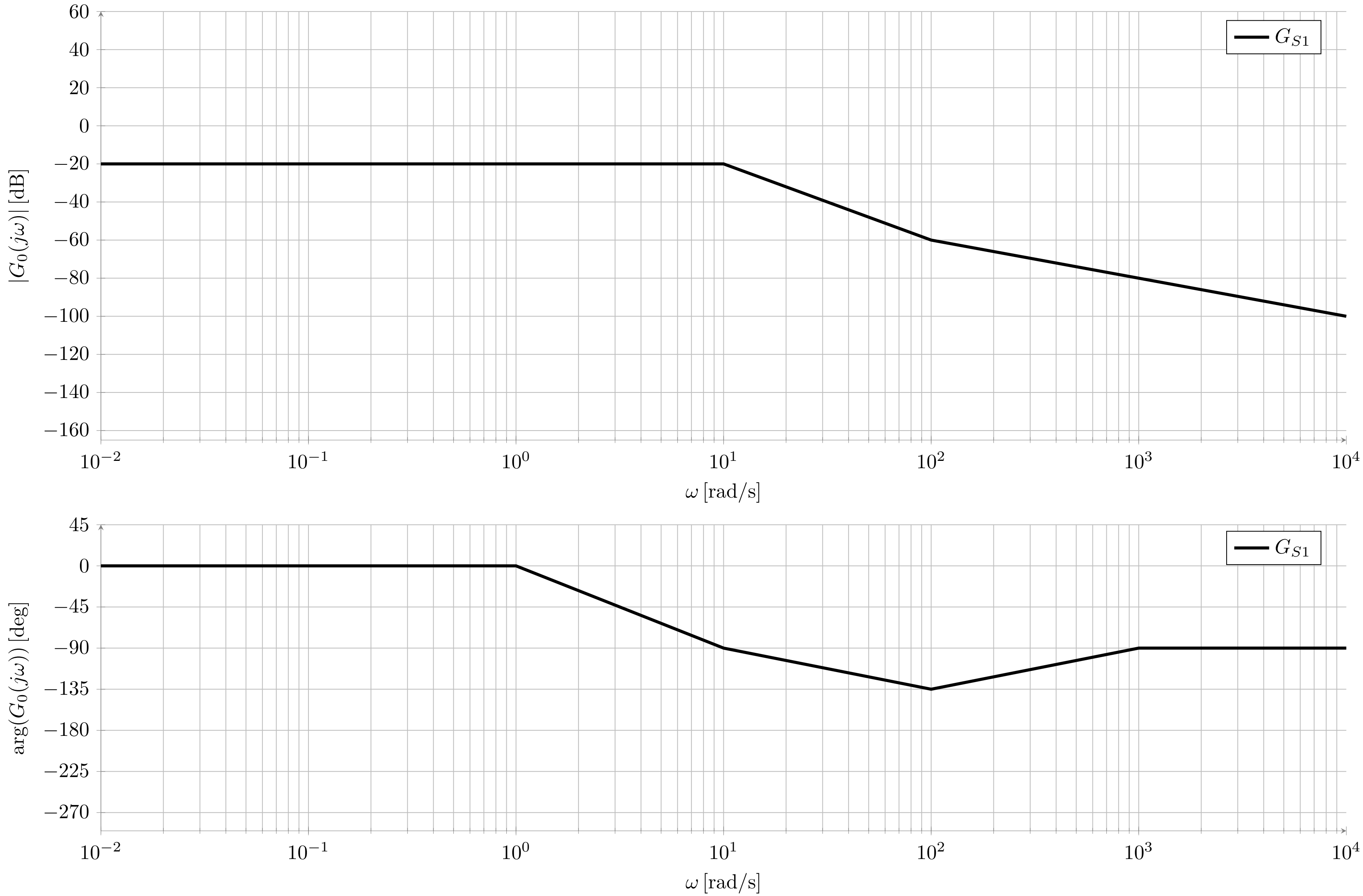

Abbildung 6: Bode-Diagramm für Aufgabe 4

4. Aufgabe Musterlösung

a) Übertragungsfunktion (2 PT_1-Glieder + 1 PD-Glied):

$$G_{S1}(s) = 0.1\frac{1}{1+0.1s}\frac{1}{1+0.1s}(1+0.01s), \qquad \textbf{[1 Pkt]} \tag{15}$$

b) siehe Bode-Diagramm

- Frequenzgang von G_{S2} [**0.5 Pkt**]
- Frequenzgang von G_0 [**0.5 Pkt**]

c) Ortskurve

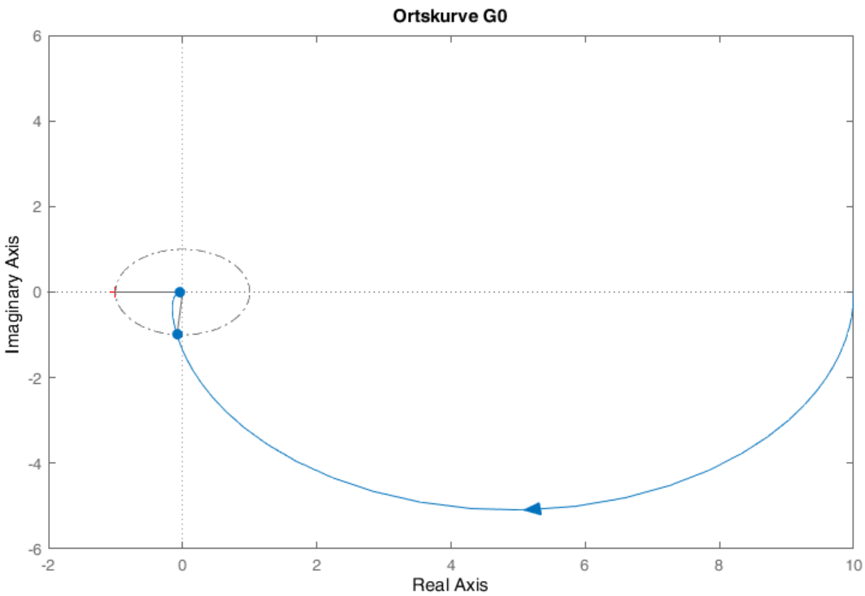

Abbildung 7: Nyquist-Diagramm mit P-Regler

- Ortskurve [**1 Pkt**]
- Kritischer Punkt, Phasen- und Amplitudenreserve markiert [**0.5 Pkt**]
- Nyquist-Kriterium: $m, l = 0$, so dass $\Delta_{\phi,ist} = \Delta_{\phi,soll} = 0$. Das System ist also stabil [**0.5 Pkt**]

d) Verstärkungsfaktor des P-Reglers

- Phasenreserve: $\varphi_r \approx 80 - 90$, Amplitudenreserve $\alpha_r \approx 20\ dB$ [**1 Pkt**]
- $K_p \approx 30 - 40$ [**1 Pkt**]

e) Störgrößenübertragungsfunktion:

$$\lim_{s\to 0}\left|\frac{G_{S2}(s)}{1+G_0(s)}\right| = \frac{10}{11} \tag{16}$$

- Angabe der Störgrößenübertragungsfunktion [**1 Pkt**]
- Angabe der stationären Verstärkung [**1 Pkt**]

e) PI-Regler

- Richtige Struktur des PI Regler: [**0.5 Pkt**]

$$G_{PI} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \tag{17}$$

- $T_i = 10$ [**0.5 Pkt**]

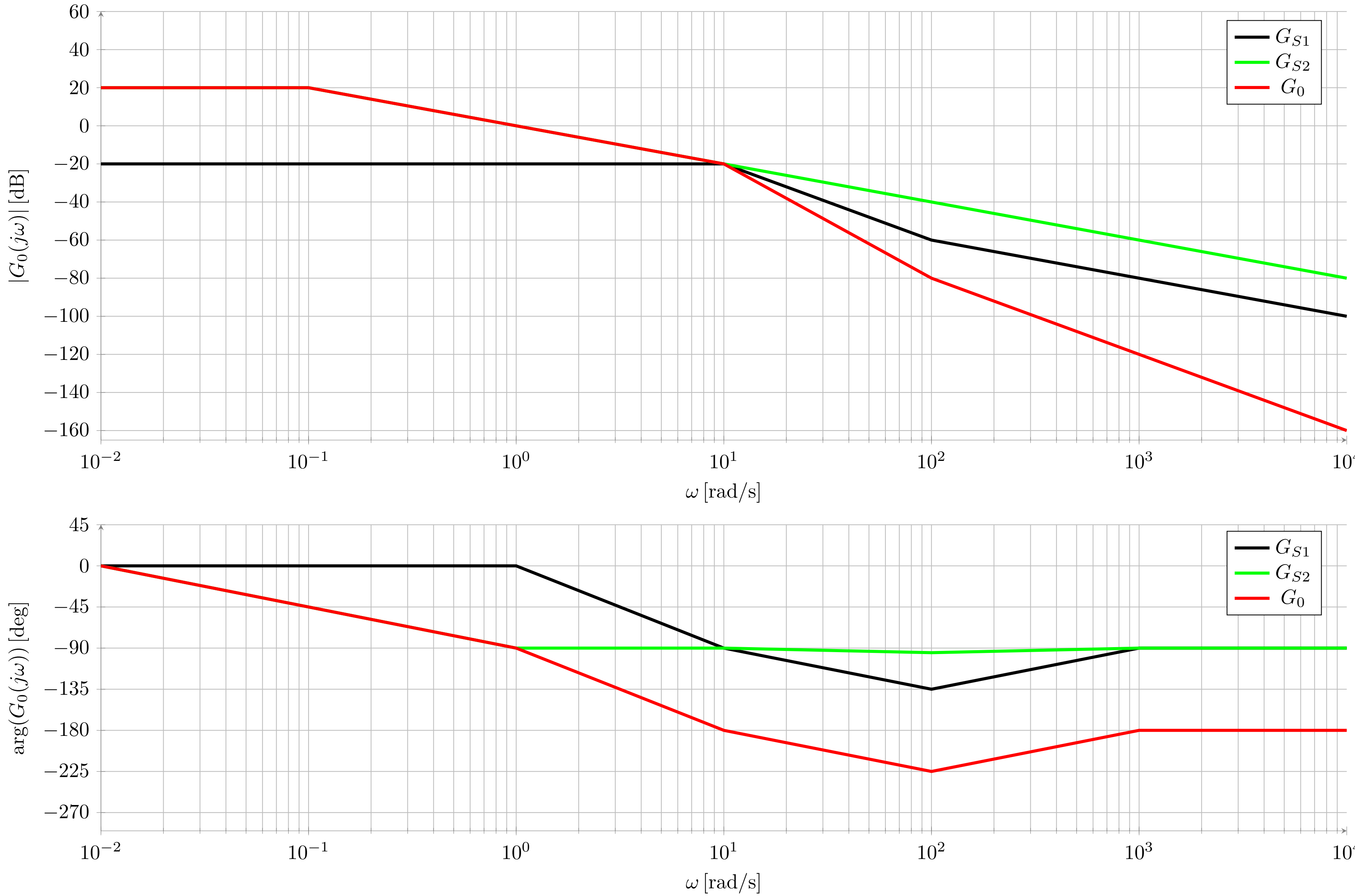

Abbildung 8: Bode-Diagramm für Aufgabe 4

5. Aufgabe: Messtechnik (7 Punkte)

Gegeben ist die Brückenschaltung mit einem Pt100-Widerstandsthermometer (mit Widerstand $R_T(t)$) zur Temperaturmessung von $T_1(t)$ in Abb. 9. Zur Messung wird ein Spannungsmessgerät mit einem Innenwiderstand R_M benutzt.

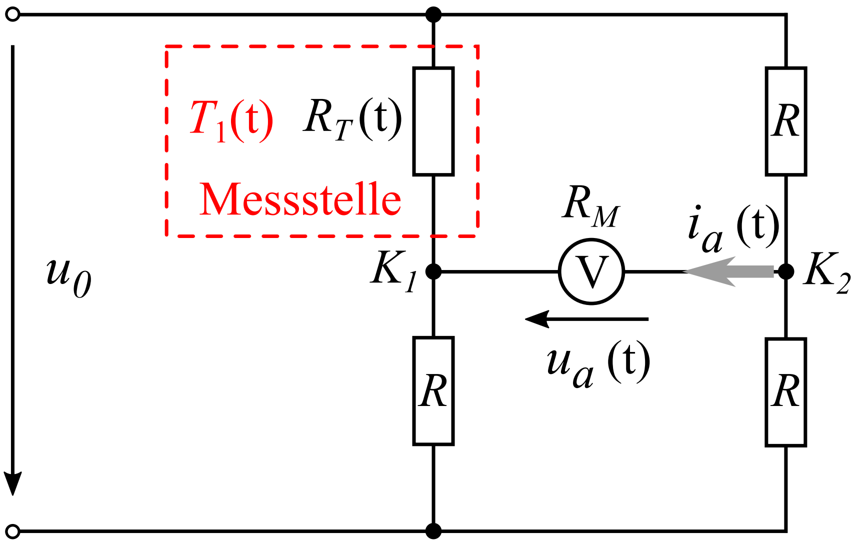

Abbildung 9: Messbrücke zur Temperaturmessung.

Für den Thermowiderstand $R_T(t)$ gilt folgende Temperaturabhängigkeit:

$$R_T(t) = R_0\,(1 + \alpha\,T_1(t)) \quad .$$

Gehen Sie für die gesamte Aufgabe von einer konstanten Temperatur T_1 aus. Die Konstanten sind Tab. 1 zu entnehmen.

u_0	12 V
R_0	75 Ω
R	100 Ω
α	$3.92 \cdot 10^{-3}\,°C^{-1}$
T_1	50 $°C$

Tabelle 1: Konstanten

a) (*1 Punkt*) Gehen Sie zunächst von einem idealen Spannungsmessgerät aus. Welche Annahme können Sie treffen und wie groß ist der Thermowiderstand R_T?

b) (*1 Punkt*) Wie groß ist die gemessene Brückenspannung $u_{a,ideal}$?

Quereinstieg: Nun wird von einem realen Spannungsmessgerät ausgegangen. Die Brückenspannung verändert sich dadurch zu $u_{a,real}$. Verwenden Sie die in Abb. 10 eingezeichneten Maschen und Knoten.

c) (*1 Punkt*) Wenden Sie die Knotenregel an den markierten Knoten K_1 und K_2 an und setzen Sie für i_a das Ohm'sche Gesetz ein.

d) (*1 Punkt*) Wenden Sie die Maschenregeln an den markierten Maschen M_1, M_2 und M_3 an.

e) (*1.5 Punkte*) Bestimmen Sie nun mit den Gleichungen aus c) und d) $u_{a,real}$ in Abhängigkeit von den Konstanten.
Hifestellung: Formen Sie die Masche 1 nach der gesuchten Grösse um. In der Gleichung stehen dann zwei Unbekannte, die Sie durch Umformen der restlichen Gleichungen und Einsetzen des Ohm'schen Gesetzes erhalten.

f) (*1.5 Punkte*) Wählen Sie R_M so, dass das Verhältnis $u_{a,real}/u_{a,ideal}$ genau 0.99 ergibt, der Unterschied also nicht mehr als 1% beträgt.

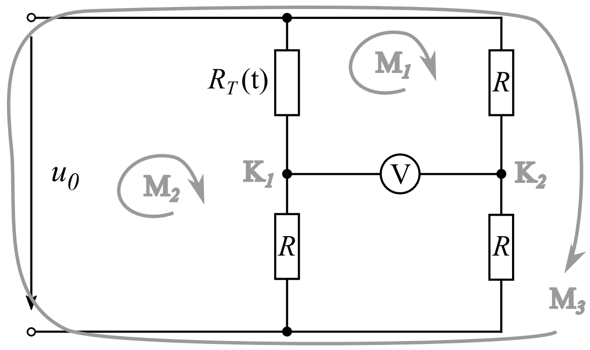

Abbildung 10: Zu verwendende Maschen und Knoten.

5. Aufgabe Musterlösung

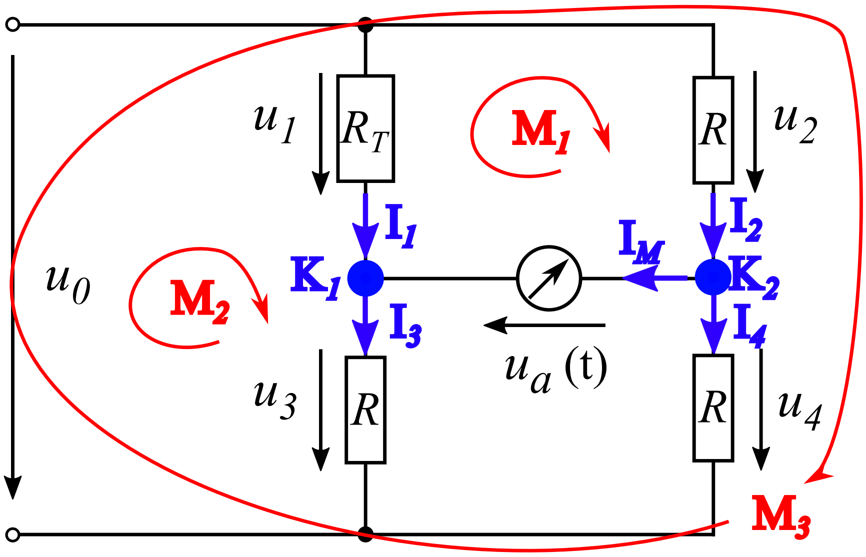

Abbildung 11: Messbrücke zur Temperaturmessung.

a) Durch die Annahme eines idealen Messgeräts folgt $R_{I,ideal} \to \infty$. Es fließt kein Strom durch das Messgerät [**0.25 Pkt**].

Bei den Referenzwerten beträgt der Thermowiderstand:

$$R_T = R_0\,(1 + \alpha\, T_{1,ref}) = 89.7\,\Omega \quad . \quad [\mathbf{0.25\ Pkt}]$$

Dafür lässt sich die Brückenspannung im Referenzzustand $u_{a,ref}$ leicht ausrechnen. Es wird die Nummerierung aus Abb. 11 mit $I_M = 0$ verwendet. Es kommt die Maschenregel zum Einsatz, wobei nur Masche 2 und die "äussere"Masche über den rechten Zweig verwendet wird.

$$I_2 = \frac{u_0}{2\,R} \quad , \quad [\mathbf{0.25\ Pkt}]$$
$$I_1 = \frac{u_0}{R_T + R} \quad . \quad [\mathbf{0.25\ Pkt}]$$

In Masche 1 ergibt sich aus der Maschenregel:

$$\begin{aligned} u_{a,ref} &= u_1 - u_2 = I_1\,R_T - I_2\,R \quad [\mathbf{0.25\ Pkt}] \\ &= \frac{R_T - R}{2(R_T + R)}\,u_0 \quad [\mathbf{0.25\ Pkt}] \\ &\approx -0.3258\,V \quad . \quad [\mathbf{0.5\ Pkt}] \end{aligned}$$

b) An den Knoten ergibt sich mit der Notation aus Abb. 11 folgendes:

$$I_1 + I_M = I_3 \quad , \quad [\mathbf{0.25\ Pkt}] \qquad (18)$$
$$I_2 = I_M + I_4 \quad . \quad [\mathbf{0.25\ Pkt}] \qquad (19)$$

c) Die Maschenregeln ergeben:

$$\text{M1:} \quad u_1 = u_2 + u_{a,real} \quad , \quad [\mathbf{0.25\ Pkt}] \qquad (20)$$
$$\text{M2:} \quad u_0 = u_1 + u_3 \quad , \quad [\mathbf{0.25\ Pkt}] \qquad (21)$$
$$\text{M3:} \quad u_0 = u_2 + u_4 \quad . \quad [\mathbf{0.25\ Pkt}] \qquad (22)$$
$$(23)$$

d) Wie zuvor beträgt der Thermowiderstand $89.7\,\Omega$.

Wie zuvor ergibt sich aus der Maschenregel:

$$u_{a,ideal} = u_4 - u_3 = \frac{R_G - R}{2(R + R_G)}\, u_0 \approx -0.1798\,V = -179.8\,mV \quad . \quad [\mathbf{0.25\ Pkt}]$$

Für die real abfallende Spannung $u_{a,real}$ werden Maschen- und Knotenregel wie in der Abb. angewendet:

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_1: &\quad I_3 = I_1 + I_M &\Rightarrow\quad & I_3 = I_1 + u_{a,real}/R_I \quad , & (24)\\
\mathrm{K}_2: &\quad I_2 = I_4 + I_M &\Rightarrow\quad & I_4 = I_2 - u_{a,real}/R_I \quad , & (25)\\
\mathrm{M}_1: &\quad u_1 = u_2 + u_{a,real} &\Rightarrow\quad & R_1\, I_1 = R_2\, I_2 + u_{a,real} \quad , & (26)\\
\mathrm{M}_2: &\quad u_0 = u_1 + u_3 &\Rightarrow\quad & u_0 = R\, I_1 + R\, I_3 \quad , & (27)\\
\mathrm{M}_3: &\quad u_0 = u_2 + u_4 &\Rightarrow\quad & u_0 = R\, I_2 + R_G\, I_4 \quad . & (28)
\end{aligned}$$

Für diese Gleichungen gibt es [**0.5 Pkt**]. Einsetzen von (24) in (27) und (25) in (28) ergibt

$$\begin{aligned}
& u_0 = R\, I_1 + R\,(I_1 + u_{a,real}/R_I) \quad ,\\
& \Rightarrow \quad I_1 = \frac{1}{R+R}\left(u_0 - R\,\frac{u_{a,real}}{R_I}\right) \quad , && (29)\\
& u_0 = R\, I_2 + R\,(I_2 - u_{a,real}/R_I) \quad ,\\
& \Rightarrow \quad I_2 = \frac{1}{R+R}\left(u_0 + R\,\frac{u_{a,real}}{R_I}\right) \quad . && (30)
\end{aligned}$$

Einsetzen von (29) und (30) in (26) ergibt

$$\begin{aligned}
& \frac{R}{R+R}\left(u_0 - R\frac{u_{a,real}}{R_I}\right) = \frac{R}{R+R}\left(u_0 + R\frac{u_{a,real}}{R_I}\right) + u_{a,real} \quad ,\\
& \Rightarrow \quad R_I = \frac{R\left(\frac{R_G}{R+R_G} + \frac{1}{2}\right) u_{a,real}}{\left(\frac{1}{2} - \frac{R}{R+R_G}\right) u_0 - u_{a,real}} \quad . \ [\mathbf{0.5\ Pkt}] && (31)
\end{aligned}$$

Die reale Spannung ist betragsmäßig kleiner als die ideale um genau 10%. Kleiner, weil der Innenwiderstand geringer ist als im idealen Fall.

$$u_{a,real} = 0.9\, u_{a,ideal} = -0.16182\,V = -161.82\,mV \quad . \quad [\mathbf{0.5\ Pkt}]$$

Alles eingesetzt in (31) ergibt:

$$R_I \approx 885\,\Omega \quad . \quad [\mathbf{0.5\ Pkt}]$$