„Grundlagen der Mess- und Regelungstechnik“

Prüfung Sommersemester 2019

Teil 1: Theorieteil

9 LP

6. August 2019

Bearbeitungszeit : 50 Min

erlaubte Hilfsmittel: keine

Name, Vorname: ____________________

Matr. Nr: ____________________

Studiengang: ____________________

Abschluss: ○Bachelor ○Master ○Diplom

GMRT-Übungsschein im Wintersemester 20___/___ erhalten.

	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
Σ Theorieteil	20	

Begründen/Erläutern Sie Ihre Antworten mit wenigen Worten.

1. (*1 Punkt*) Welche Ziele sollen mit einer Regelung üblicherweise erreicht werden?
2. (*1 Punkt*) Das Modell einer nichtlinearen Regelstrecke lautet: $\dot{y}(t) = 2y(t) + e^{u(t)^2}$.
   Wie können Sie trotzdem sehr einfach einen linearen Regler auslegen?
3. (*3 Punkte*) Zeichnen Sie einen Standardregelkreis ohne Störungen, bei dem der Rückführungszweig einen Block $G_1(s)$ enthält. Formen Sie danach das Blockschaltbild so um, dass im Rückführungszweig keine Übertragunsgfunktion mehr auftaucht.
4. (*2 Punkte*) Welche Kriterien sind für die Dominanz eines Pols ausschlaggebend?
5. (*2 Punkte*) Sie erhalten Messdaten einer Anlage und die Information, dass das Ein-/ Ausgangverhalten am Besten mit einem $\mathrm{DT_1T_0}$-Übertragungsverhalten abgebildet werden kann. Geben Sie die Übertragungsfunktion an. Wie müssen Sie bei der Modellidentifikation vorgehen?
6. (*2 Punkte*) Beschreiben Sie das Vorgehen bei einer Reglerauslegung mit direkter Vorgabe.
7. (*1 Punkt*) Sie bekommen die Skizze einer WOK mit je einem Pol in der linken und in der rechten Halbebene. Ist die Regelstrecke instabil?
8. (*1 Punkt*) Was ist die Idee einer dynamischen Vorsteuerung? Was muss dabei beachtet werden? (Sie brauchen keine Skizze zu zeichnen)
9. (*1 Punkt*) Ein Regelkreis wird mit einem dynamischen Vorfilter $G_v(s)$ erweitert. Wann ist das Gesamtsystem asymptotisch stabil?
10. (*1 Punkt*) Was bedeutet das Bode-Integral: $\int_0^\infty \log|S(j\omega)|\, d\omega = 0$
    und wann gilt die Aussage?
11. (*1 Punkt*) Wie ist die Bandbreite eines Systems definiert?
12. (*1 Punkt*) Was versteht man unter der "Linke-Hand-Regel" beim Nyquist-Verfahren?
13. (*2 Punkte*) An einem metallischen Stab, der an seinen Enden unterschiedlichen Temperaturen ausgesetzt ist, soll eine Thermospannung gemessen werden. Beschreiben Sie das Vorgehen mit kurzen Sätzen und einer Skizze.
14. (*1 Punkt*) Erklären Sie die Funktionsweise einer kapazitiven Füllstandsmessung.

„Grundlagen der Mess- und Regelungstechnik“

Prüfung Sommersemester 2019

Teil 2: Rechenteil

9 LP

6. August 2019

Bearbeitungszeit: 120 Min

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, zwei beschriebene Blätter

Name, Vorname: ______________________

Matr. Nr: ______________________

Studiengang: ______________________

Abschluss: ○ Bachelor ○ Master ○ Diplom

GMRT-Übungsschein im Wintersemester 20___/___ erhalten.

	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
Aufgabe 1	9	
Aufgabe 2	7	
Aufgabe 3	8	
Aufgabe 4	9	
Aufgabe 5	6	
Σ Rechenteil	39	

1. Aufgabe: Modellbildung (9 Punkte)

Gegeben sei der in Abbildung 1 dargestellte Ein-Massenschwinger. Das System besteht aus einer Masse $m = 2\,\text{kg}$, einem Federelement mit der Steifigkeit $k_\text{f} = 7\,\text{kg/s}^2$ und einem Dämpferelement mit der Dämpfungskonstanten $k_\text{d} = 3\,\text{kg/s}$. Die Position der Masse ist x. Stellgröße ist die Verschiebung des Fußpunktes $u(t)$. Die Gewichtskraft ist zu vernachlässigen.

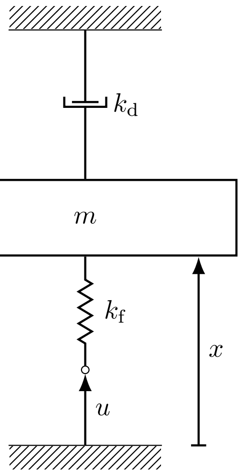


Abbildung 1: Ein-Massenschwinger

a) (*1 Punkt*) Bestimmen sie unter Zuhilfenahme des 2. Newton'schen Axioms ein mathematisches Modell des dynamischen Systems in der Form $\ddot{x}(t) = ...$

b) (*2 Punkte*) Als Messgröße liegt die Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ vor. Überführen sie das Differentialgleichungssystem in ein Zustandsraummodell, der Form:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \mathbf{A}\underline{x} + \underline{b}u(t) \quad , \ \underline{x}(0) = \underline{0} \\ y(t) &= \underline{c}^T\underline{x} + du(t) \quad .\end{aligned}$$

c) (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion von $u(t)$ auf $y(t)$.

Quereinstieg: Gehen sie im Weiteren **unbedingt** von folgender Übertragungsfunktion aus:

$$G(s) = \frac{5s}{s^2 + 4s + 4}$$

d) (*1.5 Punkte*) Zeichnen Sie die Sprungantwort von $G(s)$ qualitativ.

e) (*1.5 Punkte*) Es greife nun eine messbare Störung $Z(s)$ mit der die Störübertragungsfunktion $G_\text{Z}(s) = \dfrac{s}{0.4\,(s+2)(s+3)}$ an, die auf den Ausgang wirkt mit

$$Y(s) = G(s)U(s) + G_\text{Z}(s)Z(s)$$

Legen Sie eine dynamische Störgrößenaufschaltung $G_A(s)$ aus, welche im **offenen** Regelkreis für $G_\text{R}(s) = 1$ die Auswirkung von $Z(s)$ ausgleicht.

f) (*1 Punkt*) Warum muss man sich in vielen Fällen mit einer stationären Störgrößenaufschaltung begnügen?

1. Aufgabe: Modellbildung [11.0 P]

a) $m\ddot{z} = k_f(u - z) - k_d(\dot{z})$ [**1.0 P**]

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -1.5 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{c}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = 0,$ [**2.0 P**]

c)

$$(s^2 + \frac{kd}{m}s + \frac{kf}{m})Z(s) = \frac{kf}{m}U(s) \quad [\mathbf{0.5\ P}]$$

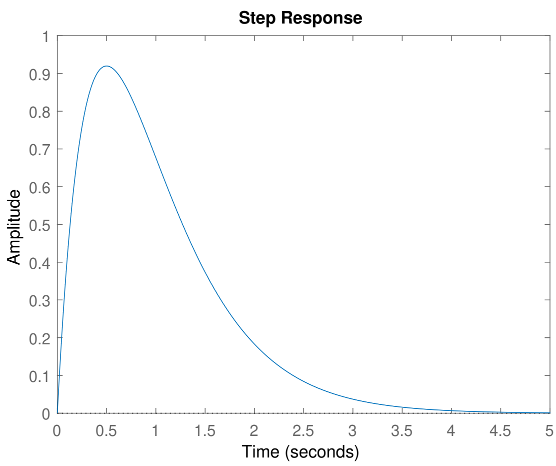
da Geschwindigkeit die Regelgröße ist, muss die Position abgeleitet werden. Es gilt mit $Y(s) = Z(s) \cdot s$ daher: [**0.5 P**]

$$(s^2 + \frac{k_d}{m}s + \frac{k_f}{m})Y(s) = \frac{k_f\ s}{m}U(s) \quad [\mathbf{0.5\ P}]$$

und damit:

$$G(s) = \frac{\frac{k_f}{m}\ s}{s^2 + 3s + \frac{k_f}{m}} = \frac{3.5\ s}{s^2 + 1.5s + 3.5} \quad [\mathbf{0.5\ P}]$$

d) Pole sind real [**0.5 P**], für qualitative Sprungantwort (aperiodisches DT2) [**1.0 P**]



e)

$$Y(s) = -G(s)G_A(s)\ Z(s) + G_Z(s)\ Z(s) \quad [\mathbf{0.5\ P}]$$

aus der Forderung, dass $Z(s)$ keinen Einfluss auf $Y(s)$ haben soll folgt:

$$\begin{aligned} G(s)G_A(s) &= G_Z(s) \quad [\mathbf{0.5\ P}] \\ G_A(s) &= \frac{G_Z(s)}{G(s)} = \frac{s+2}{2(s+3)} \quad [\mathbf{0.5\ P}] \end{aligned}$$

f) Weil mit der obigen Rechnung in vielen Fällen $G_A(s)$ eine akausale bzw. nicht realisierbare Übertragungsfunktion darstellt (Zählergrad größer als Nennergrad). [**1.0 P**]
In diesen Fällen muss mit dem Endwertsatz $G_A(s)$ in eine stationäre Aufschaltung transformiert werden.

2. Aufgabe: Zustandsraummodell (7 Punkte)

Ist es möglich, die Position $x(t)$ und Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ eines Objektes zu ermitteln, falls eine (fehlerfreie) Messung der Beschleunigung $y(t) = \ddot{x}(t)$ vorliegt? Die Anfangsbedingungen $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ seien unbekannt. Gehen Sie davon aus, dass eine Änderung der Beschleunigung durch einen bekannten äußeren Eingriff $\dddot{x}(t) = u(t)$ bewirkt werden kann.
Gehen Sie wie folgt vor:

a) (*1.5 Punkte*) Stellen Sie ein Zustandsraummodell auf, das das Ein-/Ausgangsverhalten von $u(t)$ auf $y(t)$ beschreibt, und welches die Position und Geschwindigkeit als Elemente des Zustandsvektors enthält.

b) (*2 Punkte*) Überprüfen Sie das System auf vollständige Beobachtbarkeit und beantworten Sie die eingangs gestellte Frage.

c) (*1 Punkt*) Überprüfen Sie, ob das System mittels $u(t)$ vollständig steuerbar ist. Ist ein stabilisierender Zustandsregler für das System somit realisierbar?

Quereinstieg: Rechnen Sie ab hier mit folgendem System weiter:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot u(t) \, , \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} . \tag{1}$$

Gehen Sie davon aus, dass $x_2(t)$ die Ausgangsgröße des Systems ist.

d) (*2 Punkte*) Überprüfen Sie die Stabilität des neuen Systems.

e) (*0.5 Punkte*) Wie ändert sich die Stabilität des neuen Systems, falls $x_1(t)$ und nicht $x_2(t)$ die Ausgangsgröße des Systems ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Aufgabe Musterlösung [Σ 7 Pkte]

a) [Σ **1.5 Pkte**]

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \ddot{x}(t)\\ \dddot{x}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x(t)\\ \dot{x}(t)\\ \ddot{x}(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \cdot u(t)\,, \qquad [1.0\,\text{Pkte}]$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x(t)\\ \dot{x}(t)\\ \ddot{x}(t)\end{bmatrix}\,. \qquad [0.5\,\text{Pkte}]$$

b) [Σ **2 Pkt**]

$$\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix}\underline{c}^T\\ \underline{c}^T \cdot \mathbf{A}\\ \underline{c}^T \cdot \mathbf{A}^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad [0.5\,\text{Pkte}]$$

→ $\text{rg}(\mathbf{Q}_o) = 1 < 3 = n$ [0.5 Pkte]

→ Das System ist nicht vollständig beobachtbar. [0.5 Pkte]

→ Damit sind x und $\dot{x}$ ohne Kenntnis der Anfangsbedingung nicht aus $\ddot{x}$ ermittelbar. [0.5 Pkte]

c) [Σ **1 Pkt**]

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix}\underline{b} & \mathbf{A}\cdot\underline{b} & \mathbf{A}^2\cdot\underline{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad [0.5\,\text{Pkte}]$$

$\text{rg}\left(\mathbf{Q}_c\right) = 3 = n$ → Das System ist vollständig steuerbar. Da die Zustände x und $\dot{x}$ aber nicht beobachtbar sind, können diese nicht über einen Zustandsregler zurückgeführt werden. [0.5 Pkte]

d) [Σ **2 Pkte**]

Eigenwerte von $\mathbf{A}$ von der Diagonalen ablesen oder ausrechnen:

$$\text{eig}\left(\mathbf{A}\right) = \{0, 0, -1\}\,. \qquad [1\,\text{Pkte}]$$

Doppelter Eigenwert auf der imaginären Achse → Das System ist instabil. [1.0 Pkte]

e) [Σ **0.5 Pkte**]

Die Stabilitätsanalyse ist unabhängig von der Ausgangsgleichung. Somit ändert sich die Stabilitätsaussage nicht. [0.5 Pkte]

3. Aufgabe: Wurzelortskurve (8 Punkte)

Gegeben ist die Strecke:

$$G_\mathrm{S}(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{(0.2s + 1)(s - 1)}\,, \tag{2}$$

die zunächst mit einem P-Regler,

$$G_(s) = K_P \tag{3}$$

geregelt werden soll.

1. (*2 Punkte*) Zeichnen Sie die zugehörige Wurzelortskurve und geben Sie den Wurzelschwerpunkt an.
2. (*2 Punkte*) Geben Sie den Wertebereich der Reglerverstärkung K_P an, für den der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist. Geben Sie außerdem den Wertebereich an, für den der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist UND nicht schwingt.
3. (*2 Punkte*) Sie wählen $K_P = 2$. Wie groß ist die bleibende Regelabweichung bei einem Einheitssprung?
4. (*2 Punkte*) Es soll ein Regler gefunden werden, der eine bleibende Regelabweichung bei Führungsgrößensprüngen unterdrückt. Geben Sie die Reglerübertragungsfunktion an und skizzieren Sie die WOK für diesen Regler.

4. Aufgabe: Frequenzgang (9 Punkte)

Ein System besteht aus den zwei in Reihe geschalteten Teilsystemen $G_{S1}(s)$ und $G_{\mathrm{S2}}(s)$. Im Folgenden soll eine Regelung für das Gesamtsystem untersucht werden. Für das Teilsystem G_{S2} ist die Übertragungsfunktion gegeben durch:

$$G_{\mathrm{S2}}(s) = \frac{1}{s^2 + 10.1s + 1}$$

Das Übertragungsverhalten des ersten Teilsystems G_{S1} wurde experimentell untersucht. Der Frequenzgang $G_{\mathrm{S1}}(jw)$ ist in Abbildung 2 gegeben.

Hinweis: Die Übertragungsfunktionen beider Teilsysteme setzen sich nur aus Regelkreisgliedern erster Ordnung zusammen.

1. (*2 Punkte*) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion von $G_{\mathrm{S1}}(s)$ aus dem Bode-Diagramm in Abbildung 2. Benennen Sie die einzelnen Glieder und geben Sie die zugehörigen Zeitkonstanten und Verstärkungsfaktoren an.

2. (*2 Punkte*) Für die Regelung soll zuerst ein P-Regler mit der Verstärkung $K_p = 1$ eingesetzt werden. Zeichnen Sie den approximierten Frequenzgang der Gesamtübertragungsfunktion des offenen Regelkreises $G_0(s)$ in das beiliegende Bodediagramm (Abbildung 2) und lesen Sie - falls vorhanden - die Phasen- und Amplitudenreserve ab.

3. (*2 Punkte*) Überprüfen Sie, ob der geschlossene Regelkreis stabil ist. Zeichnen Sie dazu qualitativ die Ortskurve der offenen Strecke und markieren Sie die Amplituden- und Phasenreserve und alle weiteren wichtigen Punkte. Begründen Sie Ihre Aussage mit dem Nyquistkriterium.

4. (*1.5 Punkte*) Geben Sie für den geschlossenen Regelkreis die bleibende Regelabweichung für konstante Führungsgrößen an.

5. (*1.5 Punkte*) Um ein besseres Führungsgrößenübertragungsverhalten zu erhalten, sollen Sie nun durch Loop-Shaping einen besseren Regler auslegen. Wählen Sie einen Regler, der stationäre Genauigkeit bei konstanten Führungsgrößensprügen ermöglicht. Zeichnen Sie den angenäherten Frequenzgang in das Bodediagramm und geben Sie die Reglerparameter so an, dass asymptotische Stabilität im geschlossenen Regelkreis gewährleistet ist.

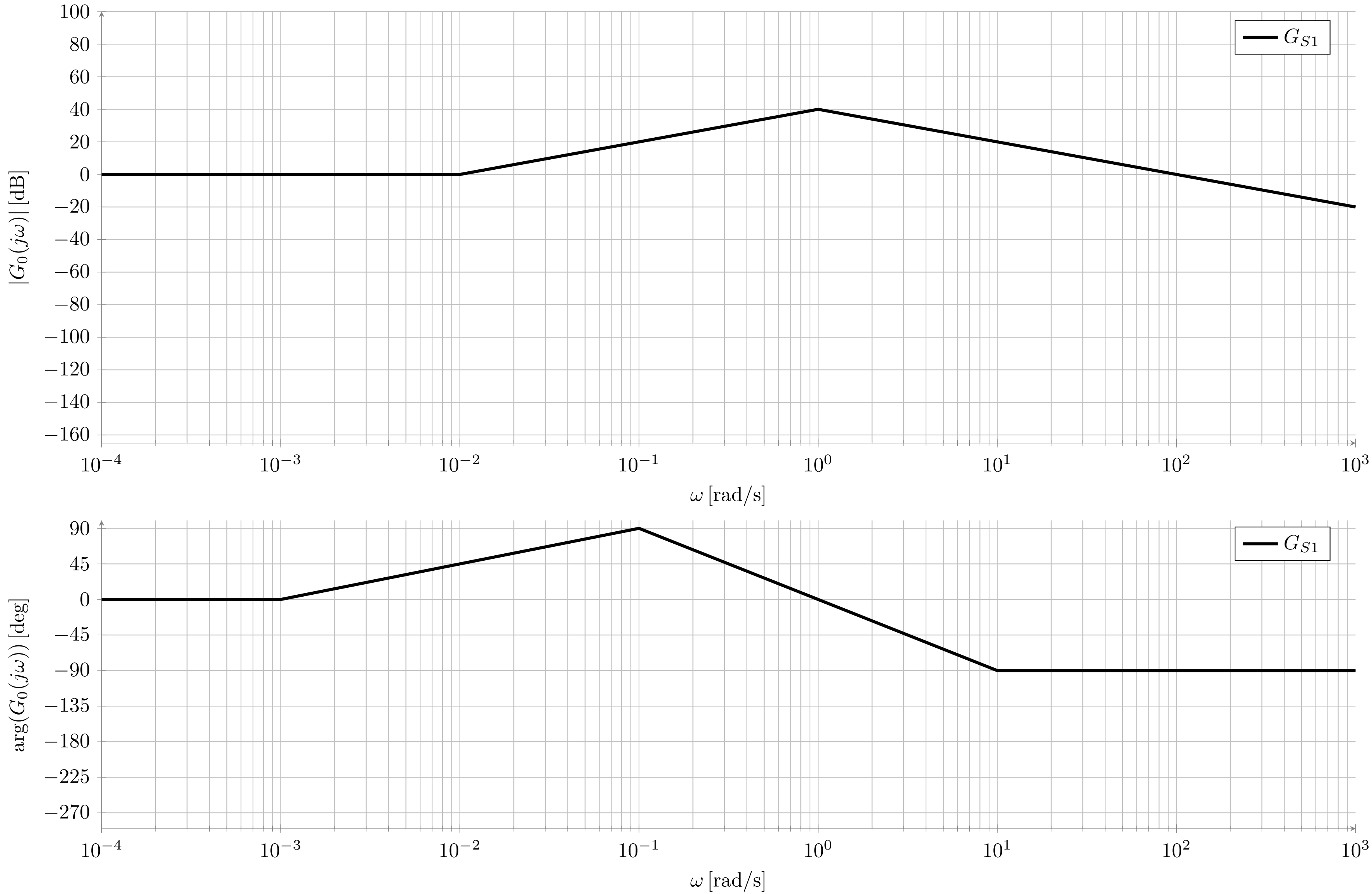


Abbildung 2: Bode-Diagramm für Aufgabe 4

4. Aufgabe Musterlösung

a) Übertragungsfunktion (2 PT_1-Glieder + 1 PD-Glied):

$$G_{S1}(s) = \frac{1}{1+s}\frac{1}{1+s}(1+100s), \qquad [\mathbf{1\,Pkt}] \tag{4}$$

b) siehe Bode-Diagramm

- Frequenzgang von G_0 [**1 Pkt**]
- Phasenreserve: $\varphi_r \approx 10\ dB$ [**0.5 Pkt**]
- Amplitudenreservre: $a_r \approx 20° - 25°$ [**0.5 Pkt**]

c) Ortskurve

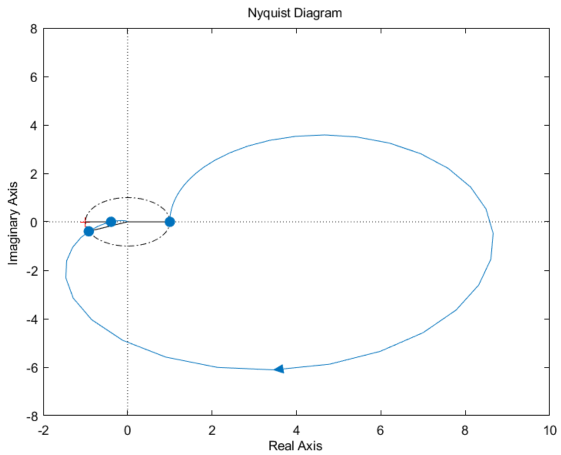


Abbildung 3: Nyquist-Diagramm mit P-Regler

- Ortskurve [**0.5 Pkt**],
- Kritischer Punkt, Phasen- und Amplitudenreserve **nicht** markiert [**0.5 Pkt**]
- Nyquist-Kriterium: $m, l = 0$, so dass $\Delta_{\phi,ist} = \Delta_{\phi,soll} = 0$. Das System ist also stabil [**1 Pkt**]

d) Kritischer Verstärkungsfaktor

- $K_{krit} \approx 2.5 - 3.16 \approx 10dB$ (siehe b) [**1 Pkt**]

e) Bleibende Regelabweichung:

- $G_0(s) = \frac{1}{1+s}\frac{1}{1+s}(1+100s)\frac{1}{s^2+10.1s+1}$

$$\lim_{s\to 0}\left|\frac{G_0}{1+G_0}\right| = \frac{1}{2} \tag{5}$$

- Angabe der stationären Verstärkung [**1 Pkt**]

f) Regler durch Loop-Shaping

- I-Anteil im Regler erforderlich: $G_R = \frac{1}{s}$ [**0.5 Pkt**]
- Nullstelle kompensieren: $G_R = \frac{1}{100s+1}$ [**0.5 Pkt**]
- Pol kompensieren: $G_R = 10s + 1$ [**0.5 Pkt**]
- Verstärkungsfaktor: $K_p \approx 0.45 - 0.55$ [**0.5 Pkt**]
- Regler: $G_R = 0.45\frac{10s+1}{(100s+1)s}$
- Frequenzgang des Reglers

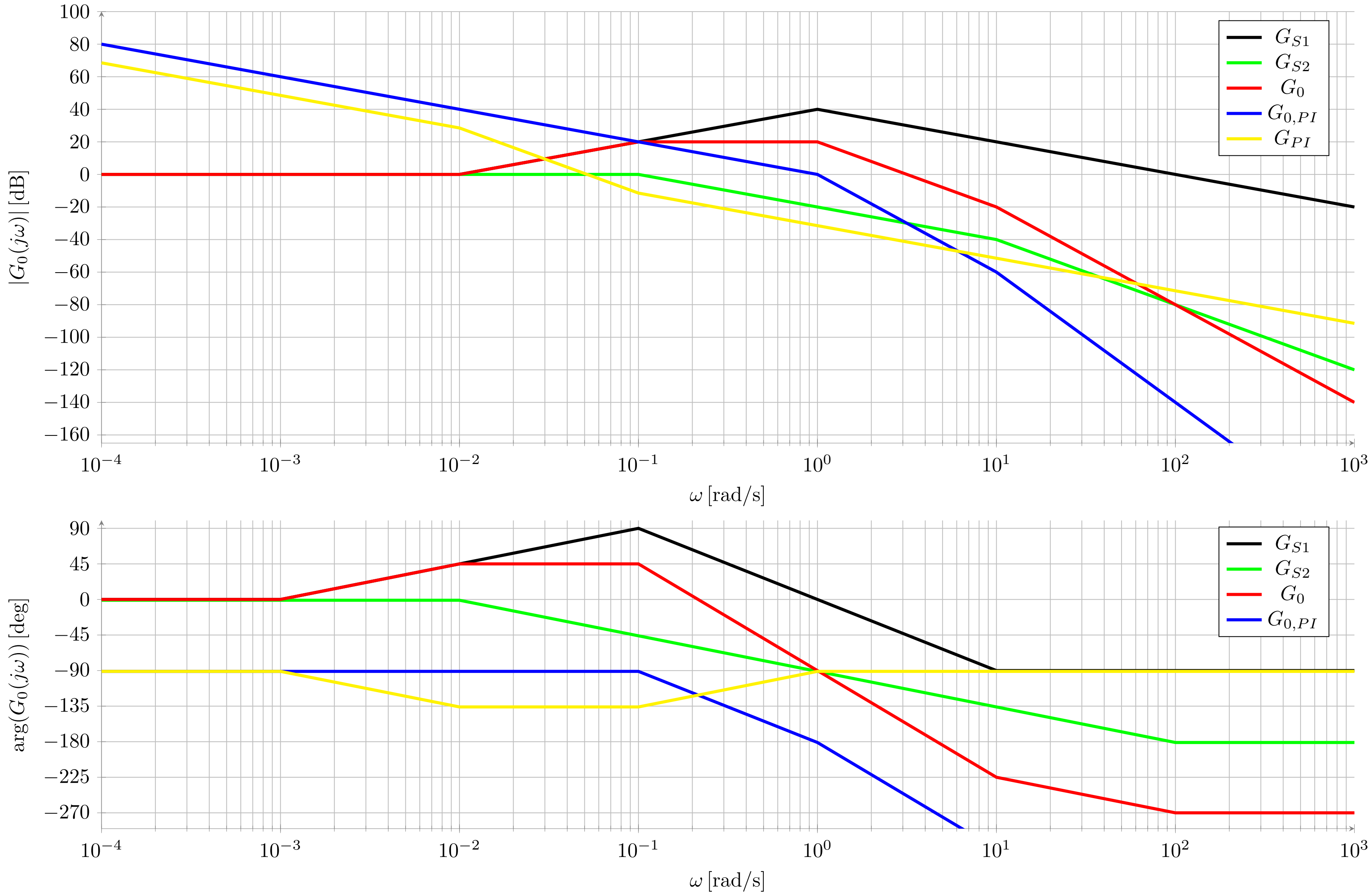


Abbildung 4: Bode-Diagramm für Aufgabe 4

5. Aufgabe: Messtechnik (6 Punkte)

Gegeben ist die Schaltung eines aktiven invertierenden Tiefpassfilters in Abb. 5. Verwenden Sie die in der Abbildung angegebenen Bezeichnungen für Spannungen, Ströme und Maschen.

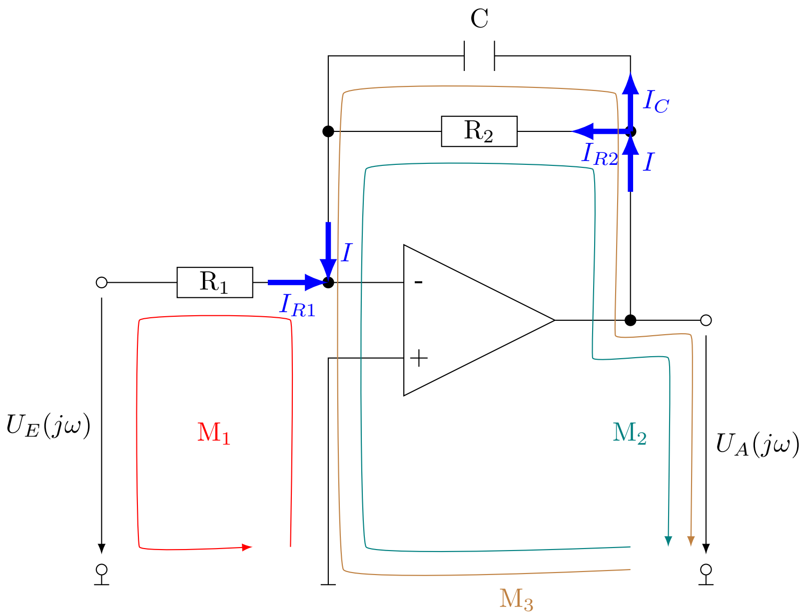


Abbildung 5: Messbrücke

a) (*4 Punkte*) Bestimmen Sie mit Hilfe der angebenen Maschen und Knoten das Übertragungsverhalten $G(s) = \frac{U_A(j\omega)}{U_E(j\omega)}$.

b) (*1 Punkt*) Geben Sie die Zeitkonstante und den Verstärkunsfaktor der Übertragungsfuntion $G(s)$ in Abhängigkeit von R_1, R_2 und C an.

c) (*1 Punkt*) Der Widerstand R_2 beträgt 1 Ohm und die Kapazität des Kondensators $C = 0.001\,\mathrm{F}$. Zeichnen sie qualitativ das Bodediagramm der Übertragungsfunktion $G(s)$.

5. Aufgabe Musterlösung

1. Bestimmen Sie mit Hilfe geeigneter Maschenregeln das Übertragungsverhalten $G(s) = \frac{U_A(j\omega)}{U_E(j\omega)}$ und benennen Sie die Art des Übertragungsverhaltens. (*4 Punkte*)

   Maschengleichungen aufstellen (0.5 Pkt pro richtige Masche und Knoten).
   Masche 1:

$$\begin{aligned} U_E &= U_{R_1} \\ &= R_1\, I_{R_1} \end{aligned} \tag{6}$$

   Masche 2:

$$\begin{aligned} U_A &= U_{R_2} \\ &= R_2\, I_{R_2} \end{aligned} \tag{7}$$

   Masche 3:

$$\begin{aligned} U_A &= U_C \\ &= Z_C\, I_C \end{aligned} \tag{8}$$

   Knoten 1:

$$\begin{aligned} I + I_{R_1} &= 0 \\ I &= -I_{R_1} \end{aligned} \tag{9}$$

   Knoten 2:

$$\begin{aligned} I - I_{R_2} - I_C &= 0 \\ I_C &= I - I_{R_2} \end{aligned} \tag{10}$$

   Gleichungen 10 in 8 einsetzen und nach I_{R_2} auflösen:

$$\begin{aligned} U_A &= Z_C(I - I_{R_2}) \\ I_{R_2} &= I - \frac{U_A}{Z_C} \end{aligned} \tag{11}$$

   Gleichungen 11 in 7 einsetzen:

$$U_A = R_2 \left(I - \frac{U_A}{Z_C} \right) \tag{12}$$

   Gleichungen 9 in 6 einsetzen und nach I auflösen:

$$U_E = -R_1\, I \tag{13}$$

$$I = -\frac{U_E}{R_1} \tag{14}$$

Gleichungen 14 in 12 einsetzen und nach U_A auflösen:

$$U_A = R_2 \left(-\frac{U_E}{R_1} - \frac{U_A}{Z_C} \right) \tag{15}$$

$$= -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \frac{R_2}{Z_C}} U_E \tag{16}$$

Richtiges Umstellen (1.5Pkt)

2. Geben Sie die Zeitkonstante und den Verstärkunsfaktor der Übertragungsfuntion $G(s)$ in Abhängigkeit von R_1, R_2 und C an. (*1 Punkt*)

   Mit $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ ergibt sich die Zeitkonstante $T = C\,R_2$ (0.5 Pkt)
   Verstärkungsfakor $K = -\frac{R_2}{R_1}$ (0.5 Pkt)

3. Der Widerstand R_2 beträgt 1 Ohm und die Kapazität des Kondensators $C = 0{,}001\,\mathrm{F}$. Zeichnen sie qualitativ das Bodediagramm der Übertragungsfunktion $G(s)$. (*1 Punkt*)

   Richtiger Frequenzgang (0.5 Pkt)
   Richtiger Phasengang(0.5 Pkt)