„Grundlagen der Mess- und Regelungstechnik“
Prüfung Wintersemester 2015/2016
Teil 1: Theorie

04. März 2016

Zeitraum: 08:00 - 08:50 Uhr

erlaubte Hilfsmittel: keine

Name, Vorname: ______________________________

Matr. Nr: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Ich strebe einen ○ Bachelor-, ○ Master-, ○ Diplom-Abschluss an.

Ich habe meinen GMRT-Übungsschein im Wintersemester 20___ erhalten.

○ Ich erkläre, dass ich mich prüfungsfähig fühle.

____
Datum und Unterschrift

	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
Σ Theorieteil	21	
Σ Rechenteil	39	

1. (*1 Punkt*) Eine asymptotisch stabile Regelstrecke wird mit einem asymptotisch stabilen Regler geregelt. Ist damit die asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises gegeben? Geben Sie eine kurze Begründung an.
2. (*1 Punkt*) Wozu benötigt man eine Vorsteuerung? Nennen Sie mindestens zwei Gründe.
3. (*3 Punkte*) Zeichnen Sie in einen Standardregelkreis ohne Störungen einen Block $G_1(s)$ in die Rückführung. Formen Sie das Blockschaltbild jetzt so um, dass im Rückführzweig keine Übertragungsfunktion mehr auftaucht. Wie lautet die Übertragungsfunktion von $W(s)$ nach $Y(s)$?
4. (*1 Punkt*) Warum **reagiert** ein I-Regler langsamer als ein P-Regler?
5. (*1 Punkt*) Wir zeichnen Sprungantworten immer ausgehen von 0. Bedeutet dies im Fall eines Temperatursignals, dass die Temperatur zu Beginn eines Experiments 0 K betrug? Begründen Sie ihre Antwort.
6. (*1 Punkt*) Sie haben für einen Regler eine Übertragungsfunktion $G_R(s)$ gefunden. Wie kann man ihn implementieren, wenn das dazu verwendete Programm keine Laplace-Transformation kennt.
7. (*2 Punkte*) Skizzieren Sie mit wenigen Sätzen, wie man aus einer Sprungantwort die Parameter eines PT_1T_0-Modells erhält.
8. (*1 Punkt*) Geben Sie die Übertragungsfunktion eines realisierbaren PD-Reglers an.
9. (*1 Punkt*) Wie lautet im idealen Fall die Störübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises, wenn man eine direkte Vorgabe durchführt?
10. (*1 Punkt*) Nennen Sie drei strukturell verschiedene Übertragungsfunktionen die eine Frequenzunabhängige Verstärkung aufweisen.
11. (*1 Punkt*) Geben Sie genau an, was eine WOK beschreibt.
12. (*1 Punkte*) Was versteht man unter einer Polvorgabe?
13. (*2 Punkte*) Geben Sie den Unterschied zwischen einem Ausschlags- und Kompensationsverfahren in der Messtechnik an.
14. (*1 Punkt*) Was kennzeichnet man in der Messtechnik mit einem indirekten Messverfahren?
15. (*1 Punkt*) Was versteht man unter einem Antialiasing-Filter und welche Besonderheit besitzt es?
16. (*1 Punkt*) Nennen Sie mindestens zwei Fehler einer Sensorkennlinie.
17. (*1 Punkt*) Wie funktioniert prinzipiell eine Druckmessung für konstante Drücke und wie kann man dabei ein elektrisches Ausgangssignal erzeugen?

„Grundlagen der Mess- und Regelungstechnik“
Prüfung Wintersemester 2016
Teil 2: Rechenteil

04. März 2016

Zeitraum: 09:00 - 11:00 Uhr

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, zwei beschriebene Blätter

Name, Vorname: ______________________________

Matr. Nr: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Ich strebe einen ○Bachelor-, ○Master-, ○Diplom-Abschluss an.

Ich habe meinen GMRT-Übungsschein im Wintersemester 20___ erhalten.

	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
Σ Theorieteil	21	
Aufgabe 1	8	
Aufgabe 2	7	
Aufgabe 3	11	
Aufgabe 4	8	
Aufgabe 5	5	
Summe	60	

Note:

1. Aufgabe (8 Punkte)

Der Durchlauferhitzer, der die Mischarmatur ihrer Dusche mit Warmwasser versorgt, liefert keine konstante Zulauftemperatur T_H und erschwert daher die manuelle Regelung der Duschwassertemperatur T_D. Die Energiebilanz der Mischarmatur und die Energiebilanz des enthaltenen Wassers liefert die folgenden Differentialgleichungen bezüglich der Temperatur:

$$m_M \cdot c_M \cdot \frac{dT_M}{dt} = kA \cdot (T_D - T_M) \tag{1}$$

$$m_w \cdot c_w \cdot \frac{dT_D}{dt} = F_H \cdot c_w \cdot (T_H - T_D) + F_K \cdot c_w \cdot (T_K - T_D) - Ak \cdot (T_D - T_M) \tag{2}$$

mit der Menge des Wasser im Mischer m_w, der Masse des Mischers m_M und den entsprechenden Wärmekapazitäten c_w und c_M, der Wärmeübergangs- mal Flächekoeffizient $k \cdot A$ und der Temperatur der Mischarmatur T_M und der Kaltwassertemperatur T_K. Die Massenströme für Heißwasser F_H und Kaltwasser F_K können mit Hilfe des Mischverhältnisses α aus dem konstanten Massenstrom F berechnet werden, sodass sich ergibt:

$$F_H = (1 - \alpha) \cdot F \qquad \text{und} \qquad F_K = \alpha \cdot F \tag{3}$$

wobei α zwischen 0 und 1 variieren kann.

a) *(3 Punkte)* Linearisieren Sie beide Differentialgleichungen um den gegebenen stationären Arbeitspunkt T_D^s, T_H^s, T_M^s und α^s und geben sie die linearisierte DGL so an, dass die darin verwendeten Variablen die Abweichungen vom Arbeitspunkt beschreiben. Die Größen m_w, c_w,m_M, c_M, T_K, F, kA seien konstant.

b) *(1.25 Punkte)* Überführen Sie die beiden linearisierten Gleichungen in den Laplaceraum und geben sie die Laplacetransformierte Variable $\Delta T_D(s)$ in Abhängigkeit der Laplacetransformierten Variablen $\Delta T_H(s)$ und $\Delta\alpha(s)$ an.

c) *(1.75 Punkte)* Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Regelkreises für den Fall, dass die Duschtemperatur ΔT_D mit dem Mischverhältnis $\Delta\alpha$ geregelt wird. Kennzeichnen Sie:
   - die Größen: ΔT_D^{soll}, ΔT_D, ΔT_H und $\Delta\alpha$
   - den Regler: G_r
   - die Strecke von $\Delta\alpha$ nach ΔT_D: G_{α,T_D}
   - Strecke von ΔT_H nach ΔT_D: G_{T_H,T_D}

d) *(0.5 Punkte)* Was müssen Sie in dem Blockschaltbild aus Aufgabenteil c) ergänzen, wenn Sie den Regler in der Realität implementieren möchten?

e) *(1 Punkt)* Das Wasser muss vom Austritt der Mischarmatur noch den Schlauch bis zum Duschkopf passieren. Benennen Sie eine idealisierte Übertragungsfunktion $G_S(s)$ um dieses Verhalten zu beschreiben und geben Sie die Gleichung im Laplaceraum an. Wo würden Sie den Messfühler für die Regelung platzieren, am Duschkopf oder am Austritt der Mischarmatur? Begründen Sie ihre Entscheidung.

f) *(0.5 Punkte)* Welches Regelungskonzept ist geeignet, die Auswirkungen der willkürlich auftretenden Schwankungen bei der Zulauftemperatur T_H auf die Regelgröße stark zu reduzieren? Es darf ein Temperaturfühler installiert werden, die Regelung des Durchlauferhitzers kann jedoch nicht verändert werden. Begründen Sie kurz.

Musterlösung

a) **3 Punkte:** insgesamt

Definition $\Delta X = X - Xs$ für alle 4 Größen insgesamt **0.5 Punkte:**

Linearisierung: Umformen nach f_1 oder f_2 oder bestimmen der Ableitung bezüglich $\dot{T_H}$ und $\dot{T_H}$ möglich

0.25 Punkte: $\frac{dT_M}{dt} = f_1 = \frac{Ak}{c_w m_w}(T_D - T_M)$

$\frac{\partial f_1}{\partial T_H} = 0$

0.25 Punkte: C_1 $\frac{\partial f_1}{\partial T_D} = \frac{Ak}{c_w m_w}$

$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = 0$

0.25 Punkte: C_2 $\frac{\partial f_1}{\partial T_M} = -\frac{Ak}{c_w m_w}$

0.25 Punkte: $\frac{dT_D}{dt} = f_2 = \frac{(1-\alpha)\cdot F}{m_w}(T_H - T_D) + \frac{\alpha \cdot F}{m_w}(T_K - T_D) - \frac{Ak}{m_w \cdot c_w}(T_D - T_M)$

0.25 Punkte: C_3 $\frac{\partial f_2}{\partial T_H} = F/m_w - \alpha \cdot F/m_w$

0.25 Punkte: C_4 $\frac{\partial f_2}{\partial T_D} = -\frac{(1-\alpha)F}{m_w} - \frac{\alpha F}{m_w} - \frac{Ak}{m_w c_w} = -F/m_w - Ak/(m_w \cdot c_w)$

0.25 Punkte: C_5 $\frac{\partial f_2}{\partial \alpha} = -F/m_w(T_H - T_D) + F/m_w(T_K - T_D) = F/m_w \cdot (T_K - T_H)$

0.25 Punkte: C_6 $\frac{\partial f_2}{\partial T_M} = Ak/(m_w \cdot c_w)$

Finales Aufstellen der linearisierten Gleichung oder sorgfältige Darstellung der Linearisierung zu Beginn:

0.25 Punkte:
$$\frac{d\Delta T_M}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial T_D} \cdot \Delta T_D + \frac{\partial f_1}{\partial T_M} \cdot \Delta T_M \tag{4}$$

0.25 Punkte:
$$\frac{d\Delta T_D}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial T_H} \cdot \Delta T_H + \frac{\partial f_2}{\partial T_D} \cdot \Delta T_D + \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \cdot \Delta \alpha + \frac{\partial f_2}{\partial T_M} \cdot \Delta T_M \tag{5}$$

b) **1.25 Punkt:** insgesamt

Laplacetransformation Gleichung (hierbei eindeutig Kennzeichnen welche Gleichung Laplacetransformiert wird

0.25 Punkte: $\mathcal{L}(4) = s \cdot \Delta = T_M(s) = C_1 \cdot \Delta T_D(s) + C_2 \cdot \Delta T_M(s)$

0.25 Punkte: $\Leftrightarrow \quad \Delta T_M(s) = \frac{C_1}{C_2 - s} \cdot \Delta T_D(s)$

0.25 Punkte: Laplacetransformation Gleichung 2 und **0.5 Punkte:** auflösen nach T_D

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(4) = \quad & s \cdot \Delta T_D(s) = C_3 \cdot \Delta T_H(s) + C_4 \cdot \Delta T_D(s) + C_5 \cdot \Delta\alpha(s) + C_6 \cdot \Delta T_M(s) \\
|- \quad & C_6 \cdot \Delta T_M(s) - C_4 \cdot \Delta T_D(s) \text{ und ersetzten mit } \Delta T_M(s) = \frac{C_1}{C_2 - s} \cdot \Delta T_D(s) \\
\Leftrightarrow \quad & \left(s - C_4 - \frac{C_6 \cdot C_1}{C_2 - s}\right) \cdot \Delta T_D(s) = C_3 \cdot \Delta T_H(s) + C_5 \cdot \Delta\alpha(s) \\
\Leftrightarrow \quad & T_D(s) = \frac{C_3}{\left(s - \frac{C_6 \cdot C_1}{C_2 - s}\right)} \cdot \Delta T_H(s) + \frac{C_5}{\left(s - \frac{C_6 \cdot C_1}{C_2 - s}\right)} \cdot \Delta\alpha(s)
\end{aligned}$$

c) **1.75 Punkte:** insgesamt

0.5 Punkte: ΔT_D^{soll} und ΔT_D korrekt (muss hinter der Störung sein)
0.5 Punkte: ΔT_H und $\Delta\alpha$ an den richtigen Stellen
0.25 Punkte: G_R und G_{α,T_D}
0.25 Punkte: ΔT_D korrekt zurückgeführt (nach der Störung)
0.25 Punkte: G_{T_H,T_D}

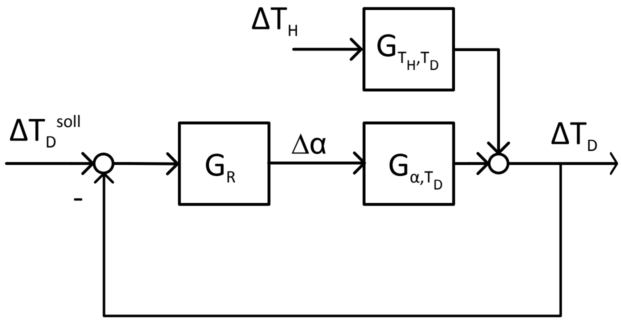


Abbildung 1: Lösung Blockschaltbild

d) **1 Punkt:** insgesamt **0.25 Punkte:** Totzeitglied T_0 oder Rohr mit Vermischeung PT_n mit großem n und kleinem T_n

0.25 Punkte: $G_S(s) = e^{-T_0 \cdot s}$ oder $G_S(s) = \frac{1}{(s \cdot T_n + 1)^n}$

0.25 Punkte: Platzierung an der Armatur, **0.25 Punkte:** weil eine Totzeit die Regelung erschwert. (Alternativ, Platzierung am Duschkopf, weil störungen der Temperatur, also Wärmeverlust auf dem Weg zum Duschkopf auftreten könnten

e) **0.5 Punkte:** Vorsteuerung, weil in Übertragungsfunktion nur Abweichungen vom Arbeitspunkt betrachtet.

f) **0.5 Punkte:** insgesamt

0.25 Punkte: Störgrößenaufschaltung **0.25 Punkte:** Die Störung T_H kann sehr einfach gemessen und dann bei der Regelung berücksichtigt werden. (Dynamische Vorsteuerung, wenn erklärt dass die Störung als Eingang in die Vorsteuerung eingeht)

2. Aufgabe (7 Punkte)

Gegeben sei die Strecke $G_S = \frac{1}{1+2s}$.

a) (*1.5 Punkte*) Geben Sie die Pole der Reglerübertragungsfunktion an, die unbedingt benötigt werden, damit der geschlossene Regelkreis der Funktion $w(t) = sin(2t)$ ohne bleibende Regelabweichung folgen kann. Zeichnen Sie die erhaltenen Pole des Reglers sowie die Pole der Strecke in die s-Ebene ein.

Hinweis:

- *Sie müssen in Aufgabenteil a) nicht die Stabilität des geschlossenen Regelkreises überprüfen (das geschieht in den folgenden Aufgabenteilen).*
- *Unten ist die Lapace-Trafo-Tabelle gegeben.*

b) (*0.5 Punkte*) Mit den gewählten Polen aus a) lässt sich folgender Regler synthetisieren: $G_R(s) = K \prod_j \frac{1}{p_j - s}$. Würden Sie den Regelkreis nun schließen (mit einem Verstärkungsfaktor größer als 0), wäre der geschlossene Regelkreis instabil. Kontrollieren Sie dies, indem Sie die zugehörige WOK skizzieren (in der s-Ebene aus a)).

c) (*2 Punkte* oder *3 Punkte*) **Quereinstieg möglich:** *Falls ihr geschlossener Regelkreis in b) für bestimmte K asympt. stabil sein sollte, verwenden Sie als Reglerpole p_j zwei Integratorpole. Dies können Sie auch tun, falls sie a) und b) nicht bearbeitet haben.*
Erweitern Sie ihren Regler, sodass eine der folgenden Varianten erfüllt ist.

- **Variante 1**: Der geschlossene Regelkreis sei asymptotisch stabil, (*2 Punkte*)
- **Variante 2**: Der geschlossene Regelkreis sei asymptotisch stabil und enthalte für mindestens ein K ausschließlich rein reelle Pole. (*3 Punkte*)

Zeichnen Sie die WOK und geben Sie die Übertragungsfunktion des Reglers in Abhängigkeit des Verstärkungsfaktors K an.

d) (*1 Punkt*) Falls Sie sich in c) für die **Variante 1** entschieden haben, bestimmen Sie rechnerisch den Wurzelschwerpunkt.
Falls Sie sich in c) für die **Variante 2** entschieden haben, bestimmen Sie den Verstärkungsfaktor, ab dem der geschlossene Regelkreis nicht schwingungsfähig ist.

Hinweis für Variante 2: *Verzweigungspunkte dürfen graphisch bestimmt werden.*

e) (*1 Punkt*) Ist der von Ihnen entworfene Regler (es geht um die Übertragungsfunktion des Reglers nicht um die des geschlossenen Regelkreises) instabil? Begründen Sie ihre Antwort.

Tabelle 1: Laplace-Trafo-Tabelle

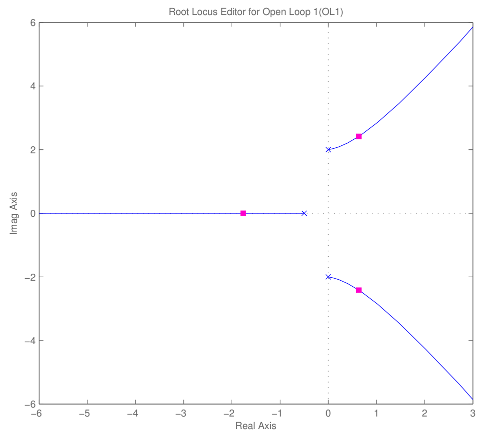
Nr.	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, $t > 0$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\delta(t)$	1
2	$\sigma(t)$ und 1	$\frac{1}{s}$
3	$t^n, \quad n = 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$t^n e^{-at}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}, \quad 0! = 1$
5	$1 - e^{at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
6	$at - (1 - e^{-at})$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$
7	$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
8	$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
9	$e^{-at}\cos(bt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
10	$e^{-at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
11	$t\cos(bt)$	$\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$
12	$t\sin(bt)$	$\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$

Musterlösung:

Gegeben sei die Strecke $G_S = \frac{1}{1+2s}$.

a) (*1,5 Punkte*) Geben Sie die Pole der Reglerübertragungsfunktion an, die benötigt werden, damit der geschlossene Regelkreis der Funktion $w(t) = sin(2t)$ ohne bleibende Regelabweichung folgen kann. Zeichnen Sie die erhaltenen Pole des Reglers sowie die Pole der Strecke in die s-Ebene ein.
1.0 Punkte: Pole: $s_{1/2} = \pm 2i$, nach dem internen Modellprinzip
0.5 Punkte: Zeichnung der s-Ebene und Pole.
davon je **0.25 Punkte:** Abzug falls Achsenbeschriftung, Pfeilrichtung oder 's-Ebene' fehlen.

b) (*0.5 Punkte*) Mit den gewählten Polen aus a) lässt sich folgender Regler synthetisieren: $K \prod_j \frac{1}{p_j - s}$. Würden Sie den Regelkreis nun schließen (mit einem Verstärkungsfaktor größer als 0), wäre der geschlossene Regelkreis instabil. Kontrollieren Sie dies, indem Sie die zugehörige WOK skizzieren (in der s-Ebene aus a)).
0.25 Punkte: : Äste zeichnen
0.25 Punkte: : Antwort



c) (*2 Punkte* oder *3 Punkte*) **Quereinstieg möglich:** *Falls ihr geschlossener Regelkreis in b) nicht für alle K instabil sein sollte, verwenden Sie als Reglerpole p_j zwei Integratorpole.* Erweitern Sie ihren Regler, sodass eine der folgenden Varianten erfüllt ist.

- **Variante 1**: Der geschlossene Regelkreis sei asymptotisch stabil, (*2 Punkte*)
- **Variante 2**: Der geschlossene Regelkreis sei asymptotisch stabil und enthalte für mindestens ein K ausschließlich rein reelle Pole. (*3 Punkte*)

Zeichnen Sie die WOK und geben Sie die Übertragungsfunktion des Reglers in Abhängigkeit des Verstärkungsfaktors K an.

Variante 1:
1.0 Punkte: WOK-Zeichnung, siehe Abb. 2
davon je **0.25 Punkte:** Abzug falls Achsenbeschriftung, Pfeilrichtung oder 's-Ebene' fehlen.
1.0 Punkte: $G_R = \frac{K(s+1/4)}{s^2+4}$

Variante 2:
Der geschlossene Regelkreis enthalte nur rein reelle Pole.
1.0 Punkte: WOK-Zeichnung, siehe Abb. 3
davon je **0.25 Punkte:** Abzug falls Achsenbeschriftung, Pfeilrichtung oder 's-Ebene' fehlen.
2.0 Punkte: $G_R = \frac{K(s+1)(s+1/4)}{s^2+4}$

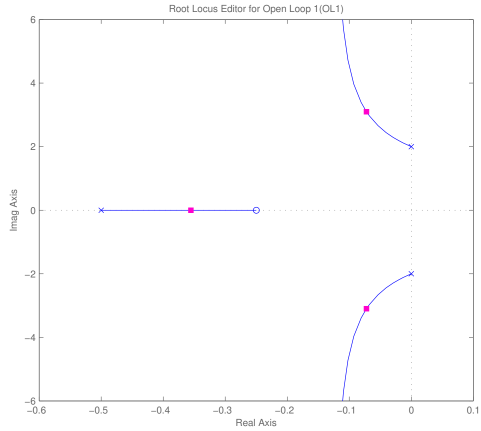


Abbildung 2: WOK as. stabiler Regelkreis

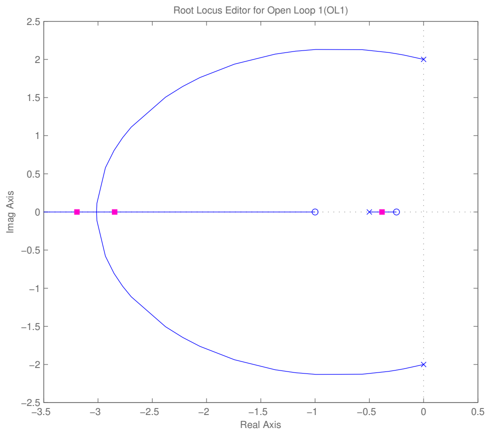


Abbildung 3: WOK as. stabiler nicht schwingungsfähiger Regelkreis

d) (*1 Punkt*) Falls Sie sich in c) für die **Variante 1** entschieden haben, bestimmen Sie rechnerisch den Wurzelschwerpunkt.
Falls Sie sich in c) für die **Variante 2** entschieden haben bestimmen Sie den Verstärkungsfaktor, ab dem der geschlossene Regelkreis nicht schwingungsfähig ist.

Hinweis für Variante 2: *Verzweigungspunkte dürfen graphisch bestimmt werden.*
Variante 1:
1.0 Punkte: Wurzelschwerpunkt: $\sigma_w = \frac{-2i+2i-1/2+1/4}{3-1} = -1/8$
Variante 2:
1.0 Punkte: Verzweigungspunkt: $s_v \approx -3$
zugehöriger Verstärkungsfaktor: $0.5K = \frac{|(-3)^2+4|\cdot|-3+1/2|}{|-3+1|\cdot|-3+1/4|} = 65/11 \Leftrightarrow K = 130/11$

e) (*1 Punkt*) Ist der von Ihnen entworfende Regler (es geht um die Übertragungsfunktion des Reglers nicht um die des geschlossenen Regelkreises) instabil? Begründen Sie ihre Antwort.
1.0 Punkte: Ja (doppelter Pol auf I-Achse), falls mit doppeltem Integratorpol gerechnet
1.0 Punkte: Nein (einfache Pole auf I-Achse), falls mit konjugiert komplexen Integratorpol gerechnet

3. Aufgabe (11 Punkte)

Gegeben ist die Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion

$$G_S\,(s) = \frac{0,4\,s + 20}{s^2 + 9\,s - 10}$$

sowie der Frequenzgang $G_R\,(j\omega)$ eines potentiellen Reglers in Abbildung 4. Finden Sie heraus, ob mit diesem Regler stationäre Führungsgenauigkeit im geschlossenen Regelkreis erreicht wird. Gehen Sie wie folgt vor:

a) *(1 Punkt)* Was für ein Übertragungsverhalten hat der Regler? Leiten Sie aus dem gegebenen Amplituden- und Phasengang von $G_R\,(j\omega)$ in Abbildung 4 die Übertragungsfunktion des Reglers $G_R\,(s)$ her.

Hinweis: Sie können die Aufgaben (b) bis (g) unabhängig von Aufgabe (a) lösen.

b) *(2 Punkte)* Zerlegen Sie die gegebene Übertragungsfunktion der Regelstrecke G_S in Serienschaltung von Standardregelkreisgliedern 1. Ordnung. Geben Sie jeweils deren Name und Eckfrequenz an. Ist die Regelstrecke stabil?

c) *(2 Punkte)* Zeichnen Sie approximativ die einzelnen Amplituden- und Phasengänge der Standardregelkreisglieder 1. Ordnung der Regelstrecke in das Bode-Diagramm in Abbildung 4 ein.

d) *(1.5 Punkte)* Zeichnen Sie den Frequenzgang des offenen Regelkreises $G_0\,(j\omega) = G_S\,(j\omega) \cdot G_R\,(j\omega)$ in Abbildung 4 ein. Tragen Sie zusätzlich alle Steigungen des Amplituden- und Phasengangs von G_0 ein.

e) *(2.5 Punkt)* Zeichnen Sie die Ortskurve des Frequenzgangs $G_0\,(j\omega) = G_S\,(j\omega) \cdot G_R\,(j\omega)$. Kennzeichnen Sie alle markanten Punkte der Ortskurve.
Geben Sie die Grenzwerte $\lim_{\omega\to 0} |G_0\,(j\omega)|$ und $\lim_{\omega\to\infty} |G_0\,(j\omega)|$ an.

f) *(1 Punkt)* Können Sie den Regler für die gegebene Regelstrecke verwenden? Begründen Sie, ob Stabilität und stationäre Führungsgenauigkeit erreicht werden, wenn Sie den offenen Regelkreis G_0 schließen.

g) *(1 Punkt)* Ist Ihre Aussage aus Aufgabenteil (f) immer noch zutreffend, falls die tatsächliche Verstärkung des Reglers **größer** als die im Datenblatt angegebene Verstärkung ist? *Hinweis: Eine qualitative Aussage auf Basis Ihrer bisherigen Ausführungen genügt. Sie müssen keine Rechnungen anstellen!*

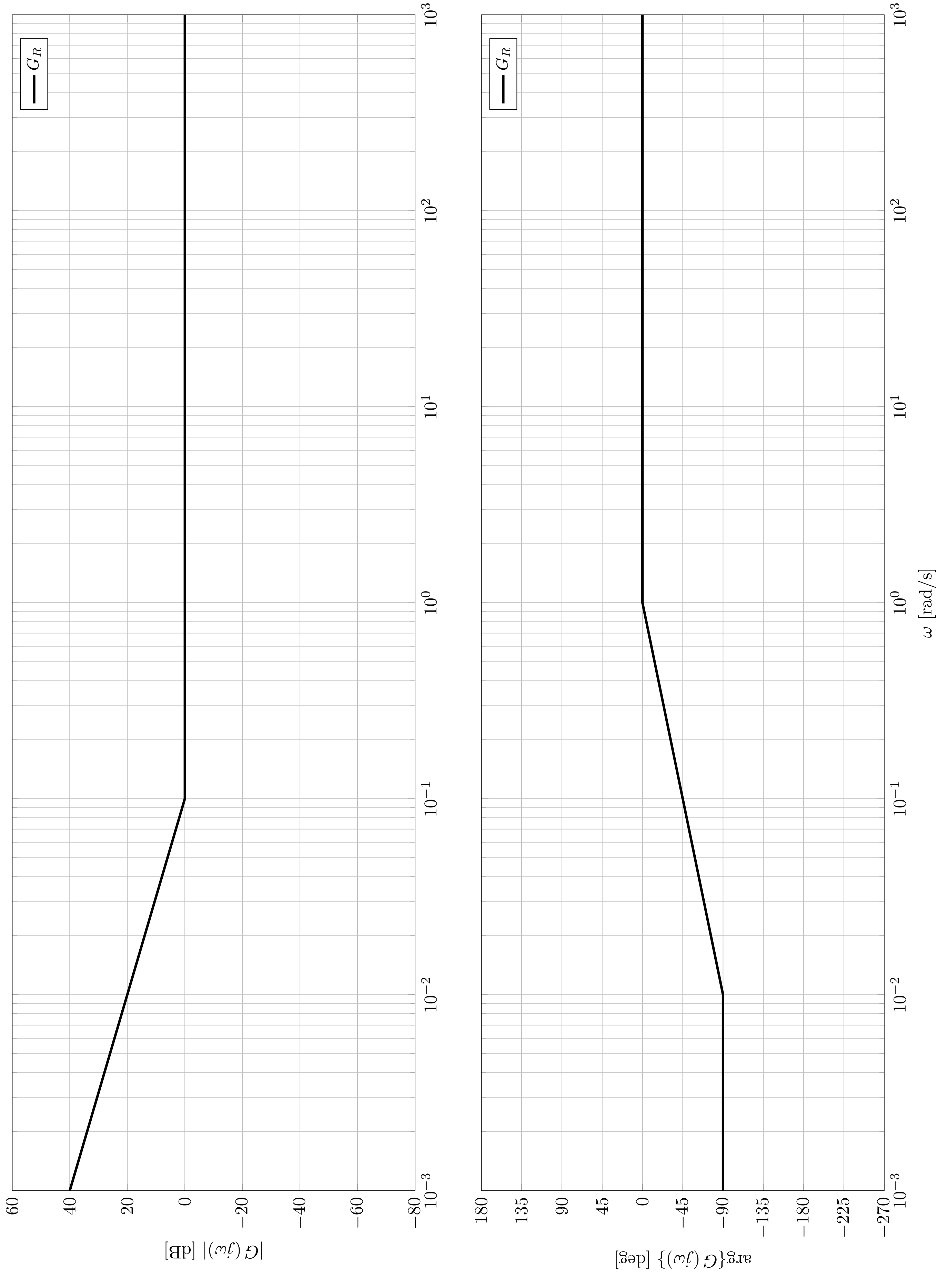


Abbildung 4: Bode-Diagramm für Aufgabe 3

Musterlösung

a) **0.5 Punkt:** PI-Verhalten. $G_R(s) = K_p + \frac{1}{T_I\, s}$
0.25 Punkt: $K_p = 1$
0.25 Punkt: $T_I = 0,1$ rad/s

b) **7 x 0.25 Punkt:** $G_S(s) = \underbrace{2}_{P} \underbrace{\left(\frac{s}{\omega_{ED}} + 1\right)}_{\substack{PD,\\ \omega_{ED} = 50 \text{ rad/s}}} \underbrace{\left(\frac{1}{\frac{s}{\omega_{ET1a}} + 1}\right)}_{\substack{PT1,\\ \omega_{ET1a} = 10 \text{ rad/s}}} \underbrace{\left(\frac{1}{\frac{s}{\omega_{ET1b}} - 1}\right)}_{\substack{\text{instab. } PT1,\\ \omega_{ET1b} = 1 \text{ rad/s}}}$

0.25 Punkt: Strecke ist instabil wegen instabilem PT1-Glied

c) **2 Punkt:** Je 0.25 Punkte (8x) pro richtigem Amplituden- bzw. Phasengang

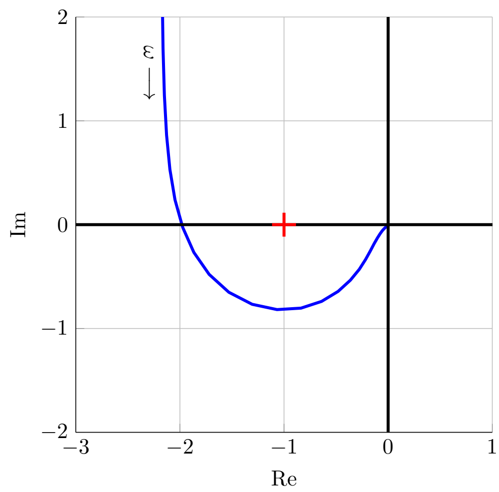
d) **1.5 Punkt:** Zeichnen des Amplitudengangs von $G_0(j\omega)$ (0.5 Punkte) und Beschriftung aller Steigungen (0.25 Punkte). Zeichen des Phasengangs von $G_0(j\omega)$ (0.5 Punkte) und Beschriftung aller Steigungen (0.25 Punkte)

e) **1.0 Punkt:** Ortskurve gezeichnet

0.5 Punkt: markante Punkte und kritischer Punkt eingetragen

0.5 Punkt: Grenzwerte (je 0.25 Punkte) $\lim_{\omega\to 0} |G_0(j\omega)| = \infty$ & $\lim_{\omega\to\infty} |G_0(j\omega)| = 0$

0.5 Punkt: Achsenbeschriftung und $G_0(j\omega)$ angeschrieben



f) **0.75 Punkt:** Nach dem Nyquistkriterium folgt mit $m_0 = 1$ instabilen Polen und $l_0 = 1$ Integratorpolen asympt. Stabilität des geschlossenen Regelkreises, da:

$$\Delta\varphi_{soll} = m_0\,\pi + l_0\,\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi = \Delta\varphi_{ist}\,.$$

0.25 Punkt: Ja, Stabilität und stationäre Führungsgenauigkeit (I-Verhalten des Reglers) gegeben.

g) **1 Punkt:** Phasengang bleibt (approximativ) unbeeinflusst von Erhöhung der Verstärkung. Amplitudengang wird nach oben verschoben:

→ Ja, mit steigender Verstärkung von $G_0(j\omega)$ steigt die Durchtrittsfrequenz, womit die Phasenreserve gegen 90° konvergiert.

Geometrisch: Erhöhung der Verstärkung "bläht"die Ortskurve auf, wobei die Ortskurve auf der richtigen Seite des kritischen Punktes bleibt (Nyquistkriterium).

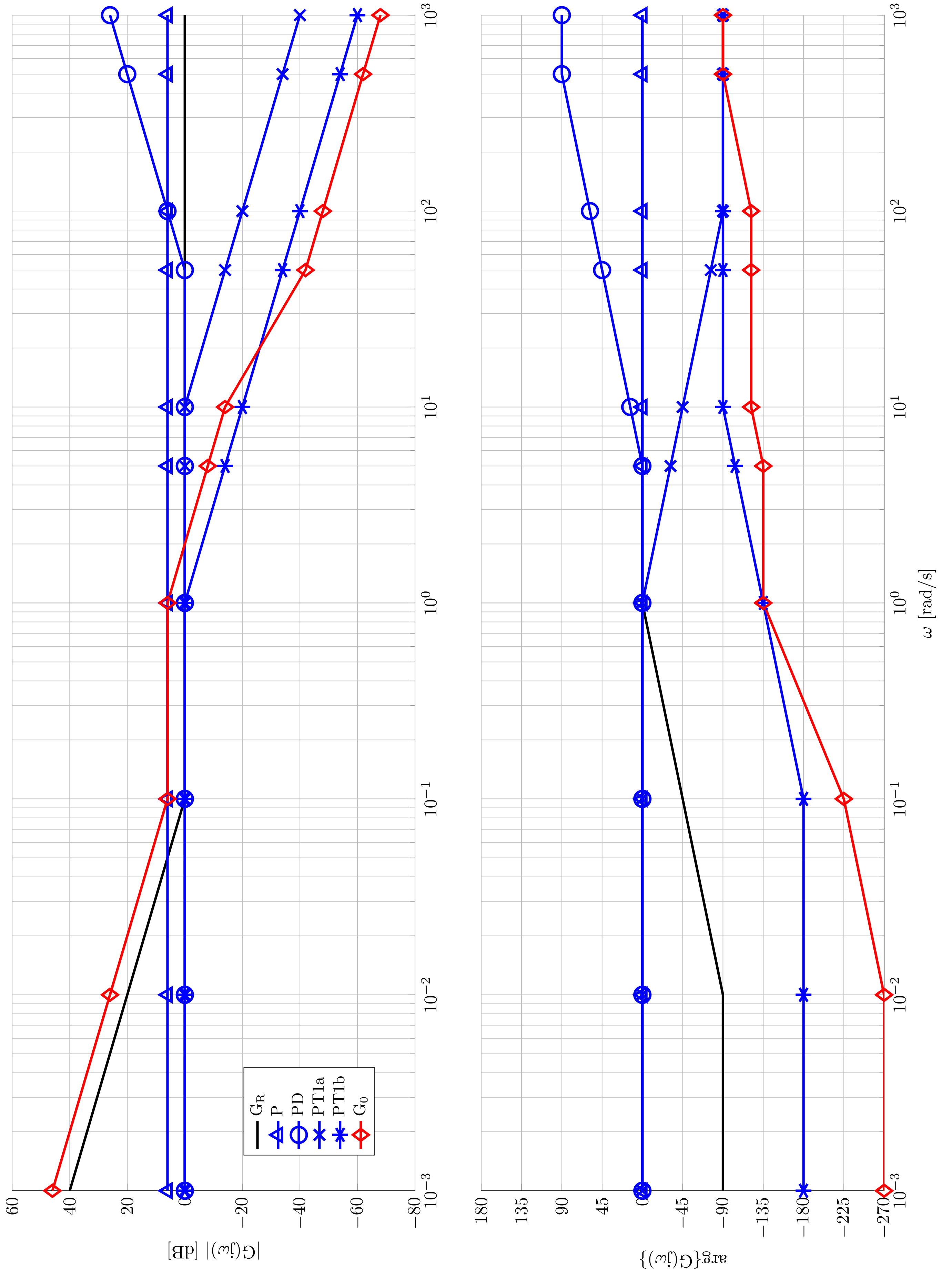


Abbildung 5: Muster Bode-Diagramm für Aufgabe 3

4. Aufgabe (8 Punkte)

Die Dynamik des in Abbildung 6 dargestellten Zweimassenschwingers wird durch das Differentialgleichungssystem

$$
\begin{aligned}
m\,\ddot{x}_1(t) &= c\left(x_2(t) - x_1(t)\right) + h\left(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\right) - k\,x_1(t)\\
m\,\ddot{x}_2(t) &= c\left(x_1(t) - x_2(t)\right) + h\left(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\right) + F(t)
\end{aligned}
$$

beschrieben. Die Anfangsbedingungen seien

$$
\begin{aligned}
x_1(0) &= x_2(0) = x_0\\
\dot{x}_1(0) &= \dot{x}_2(0) = \dot{x}_0.
\end{aligned}
$$

Hierbei stellt m die Einzelmasse der beiden schwingenden Körper. Die Federkonstanten seien c und k. Die Dämpferkonstante sei h. Das System wird durch die Kraft $F(t)$ angeregt.

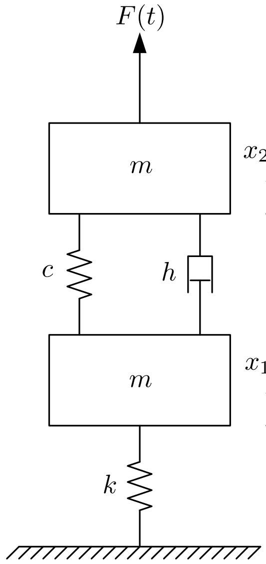


Abbildung 6: Zweimassenschwinger.

a) (*3.5 Punkte*) Bestimmen Sie die Gleichungen des Zustandsraummodells des Zweimassenschwingers für den Fall, dass die Beschleunigungsdifferenz $y(t) = \ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)$ die Messgröße ist. Wählen sie hierfür zunächst einen geeigneten Zustandsvektors $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, wobei n der Systemordnung entspricht. Geben Sie dann die Werte für $\mathbf{A}$, $\underline{b}$, $\underline{c}^T$, d des Zustandsraummodells an.

b) (*1 Punkt*) Im Folgenden wird angenommen, dass die untere Masse (x_1) fixiert ist, d.h. sie kann sich nicht mehr bewegen. Wie reduziert sich das Zustandsraummodell wenn nur noch sich zeitlich ändernde Größen im Zustandsvektor erfasst werden? Geben sie die neuen Werte für $\mathbf{A}$, $\underline{b}$, $\underline{c}^T$, d an.

c) (*3.5 Punkte*) **Quereinstieg:** Rechnen Sie in jedem Fall mit dem folgendem Zustandsraummodell weiter

$$
\underline{\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-c}{h} \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h}{m} \end{pmatrix} u(t)\ , \qquad \underline{x}(0) = \underline{x}_0\,,
$$

$$
y(t) = \begin{pmatrix} \frac{-2k}{m} & \frac{-2c}{h} \end{pmatrix} \underline{x}(t)\,.
$$

Von welchen Parameter $c, h, k, m \in \mathbb{R}$ hängt die Beobachtbarkeit dieses Systems ab. Existieren Kombinationen von Parameterwerten, so dass die Beobachtbarkeit des Systems verloren geht?

Musterlösung:

a) **3 Punkte:** Die Systemordnung ist $n = 4$. Ein geeigneter Zustandsvektor lautet somit

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} . \tag{6}$$

Mit $u(t) = F(t)$ ergibt sich das Zustandsraummodell zu

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(c+k)/m & -h/m & c/m & h/m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c/m & h/m & -c/m & -h/m \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m \end{pmatrix}}_{\underline{b}} u(t) \tag{7}$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} (2c+k)/m & 2h/m & -2c/m & -2h/m \end{pmatrix}}_{\underline{c}^T} \underline{x}(t) + \underbrace{(1/m)}_{d} u(t) \tag{8}$$

0.5 Punkte: mit der Anfangsbedingung

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} . \tag{9}$$

b) **1 Punkt:** Entsprechend der Aufgabenstellung gilt $x_1(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ und $\dot{x}_1(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$. Es sind also nur noch die Zustände $x_2(t)$ und $\dot{x}_2(t)$ zeitabhängig. Somit lautet er reduzierte Zustandsvektor

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} . \tag{10}$$

Das entsprechende reduzierte Zustandsraummodell lautet

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c/m & -h/m \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix}}_{\underline{b}} u(t) \tag{11}$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -2c/m & -2h/m \end{pmatrix}}_{\underline{c}^T} \underline{x}(t) + \underbrace{(1/m)}_{d} u(t) . \tag{12}$$

c) **1 Punkt:** Die Beobachtbarkeitsmatrix lautet

$$\mathbf{Q}_B = \begin{pmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T\mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k/m & -2c/h \\ 2(ck)/(hm) & -2k/m + 2c^2/h^2 \end{pmatrix} . \tag{13}$$

1 Punkt: Die Determinante von $\mathbf{Q}_B$ ergibt sich zu

$$|\mathbf{Q}_B| = (-2k/m)(-2k/m + 2c^2/h^2) - (2(ck)/(hm))(-2c/h) = 4k^2/m^2 . \tag{14}$$

0.5 Punkte: Die Beobachtbakeit hängt also lediglich von den Parameter k und m ab.

1 Punkt: Die Beobachtbarkeit geht verloren für

$$|\mathbf{Q}_B| = 0, \tag{15}$$

und somit für

$$[\ k = 0\ ] \text{ und/oder } [\ m \to \pm\infty\ ] . \tag{16}$$

5. Aufgabe (5 Punkte)

Gegeben sei die folgende elektische Schaltung:

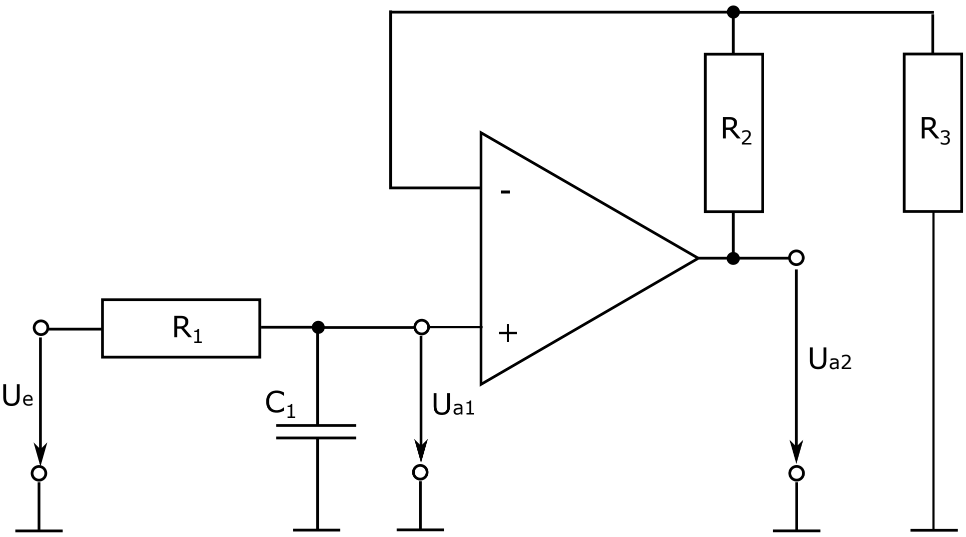


Abbildung 7: Elektrische Schaltung mit Operationsverstärker

a) *(2 Punkte)* Nutzen Sie die Kirchhoffschen Gesetze, um das Übertragungsverhalten $G_1(j\omega) = U_{a1}(j\omega)/U_e(j\omega)$ sowie das Übertragungsverhalten $G_2(j\omega) = U_{a2}(j\omega)/U_e(j\omega)$ der vorliegenden elektrischen Schaltung zu bestimmen. Der Operationsverstärker kann als ideal angenommen werden.

b) *(1 Punkt)* Um welches Signalfilter handelt es sich bei der vorliegenden Schaltung? Vergleichen Sie das frequenzabhängige Verhalten der Übertragungsfunktionen $G_1(j\omega)$ und $G_2(j\omega)$. Warum wird häufig der Mehraufwand einer aktiven Schaltung mit Operationsverstärker betrieben?

c) *(2 Punkte)* Sie möchten, dass Ihre Schaltung $G_2(j\omega)$ Gleichspannungen um den Faktor Zehn verstärkt und hochfrequente Signale in ihrer Amplitude reduziert. Konkret soll ein Eingangssignal mit einer hohen Frequenz von 10000 Hz mit -40 dB verstärkt werden.
Wählen Sie einen Satz konkreter elektrischer Bauteile für Ihre Schaltung aus, mit denen sich diese Anforderungen realisieren lassen. Die Kapazität des Kondensators sollte 1 μF nicht überschreiten, um einen handelsüblichen Keramikkondensator nutzen zu können.

Musterlösung

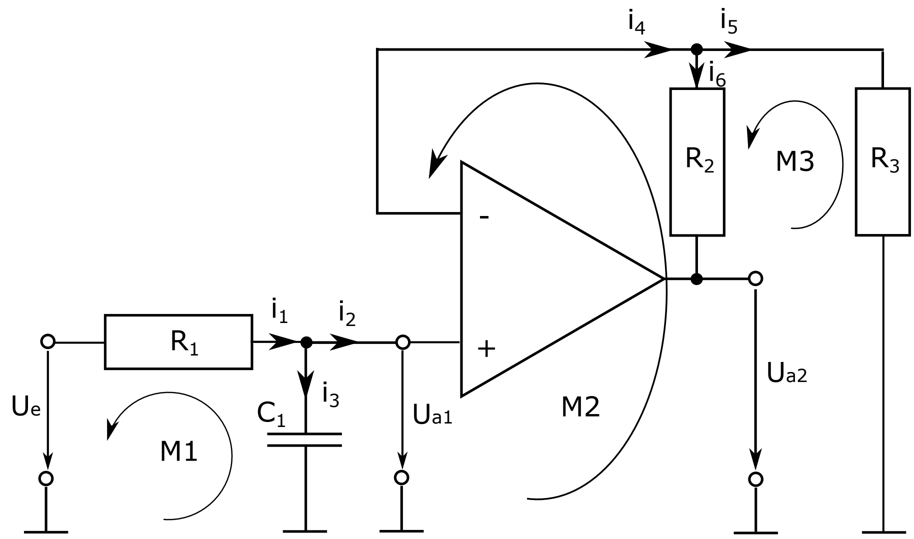


Abbildung 8: Elektrische Schaltung mit Operationsverstärker, Lösung

a) *(2 Punkte)*
Idealer OPV, d.h. $i_2 = i_4 = 0$. Daraus folgt: $i_1 = i_3$ und $i_5 = -i_6$

Masche 1:

$$U_e = (R_1 + \frac{1}{j\omega C_1})i_1 \qquad \rightarrow \qquad i_1 = \frac{U_e}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} \tag{17}$$

Masche 2:

$$i_1 \frac{1}{j\omega C_1} = -R_2 i_5 + U_{a2} \tag{18}$$

Masche 3:

$$U_{a2} = (R_3 + R_2)i_5 \qquad \rightarrow \qquad i_5 = \frac{U_{a2}}{(R_3 + R_2)} \tag{19}$$

in M1 und M3 in M2 eingesetzt:

$$\frac{U_e}{R_1 C_1 j\omega + 1} = (\frac{-R_2}{R_2 + R_3} + 1)U_{a2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{U_{a2}}{U_e} = G_2(j\omega) = \frac{\frac{R_2 + R_3}{R_3}}{R_1 C_1 j\omega + 1} \tag{20}$$

Die Übertragungsfunktion für $G_1(j\omega)$ lautet unter Verwendung von M1:

$$\frac{U_{a1}}{U_e} = G_1(j\omega) = \frac{1}{R_1 C_1 j\omega + 1} \tag{21}$$

b) *(1 Punkt)*
Bei dem vorliegenden Signalfilter handelt es sich um ein aktives Tiefpassfilter erster Ordnung. Das frequenzabhängige Verhalten ist für beide Übertragungsfunktionen gleich, nur der Verstärkungsfaktor unterscheidet sich.
Obwohl bereits die einfache Schaltung $G_1(j\omega)$ das gleiche Tiefpassverhalten aufweist wird häufig ein Operationsverstärker genutzt, um die Schaltung rückwirkungsfrei zu gestalten. Die Schaltung $G_1(j\omega)$ ohne den Operationsverstärker würde ihr Verhalten bei einer Belastung verändern, was im Bereich der Messtechnik häufig unerwünscht ist.

c) *(2 Punkt)*
Die stationäre Verstärkung soll den Faktor Zehn, also 20 dB betragen. Die Eckfrequenz muss demnach bei 10 Hz liegen, damit die Amplitude mit dem vorliegenden Tiefpassfilter erster Ordnung nach drei Dekaden, also bei 10000 Hz, auf -40 dB abgefallen ist. Es ergibt sich:

$$\omega_e = 10 \cdot 2\pi = \frac{1}{R_1 C_1} \tag{22}$$

Der Kondensator wird zu 1μF festgelegt, damit ergibt sich für R_1:

$$R_1 = \frac{1}{10 \cdot 2\pi \cdot C_1} \approx 16k\Omega \tag{23}$$

Um den stationären Verstärkungsfaktor von Zehn zu erreichen ergibt sich:

$$\frac{R_2 + R_3}{R_3} = 10 \qquad \rightarrow \qquad R_2 = 9R_3 \tag{24}$$

Es wird $R_2 = 90k\Omega$ und $R_3 = 10k\Omega$ gewählt.