

„Grundlagen der Mess- und Regelungstechnik“

Prüfung Wintersemester 2017/18

Teil 1: Theorieteil

9 LP

7. März 2018

Zeitraum: 9:10 - 10:00 Uhr

erlaubte Hilfsmittel: keine

Name, Vorname: _____

Matr. Nr: _____

Studiengang: _____

Abschluss: Bachelor Master Diplom

GMRT-Übungsschein im Wintersemester 20__/__ erhalten.

	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
Σ Theorieteil	22	

Begründen/Erläutern Sie Ihre Antworten mit wenigen Worten.

- a) (3.5 Punkte) Zur Messung der Temperatur kann ein Flüssigkeitsglasthermometer verwendet werden.
- Welches Messprinzip wird dabei verwendet?
 - Für statische Sensorkennlinien haben wir drei mögliche Fehler aufgezählt. Wie lauten diese und wodurch können Sie am Flüssigkeitsglasthermometer hervorgerufen werden?
- b) (1 Punkt) Was versteht man unter dem Wirkdruckprinzip? Charakterisieren Sie das Messverfahren.
- c) (1 Punkt) Mit was charakterisiert man die Unsicherheit einer Messung und was beschreibt das Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz?
- d) (1 Punkt) Sie arbeiten in der Lebensmittelindustrie und wollen, ohne die Strömung zu stören, den Volumenstrom von Speiseöl bestimmen. Ihnen steht ein Gerät nach dem magnetisch-induktiven Prinzip und eines basierend auf Ultraschalltechnik zur Verfügung. Entscheiden Sie sich für eins und begründen Sie.
- e) (1 Punkt) Bei einer CO₂-Messung wird in einer Messzelle eine metallisierte Membran ausgelenkt, wodurch sich die Kapazität eines Kondensators ändert, dessen eine „Platte“ aus dieser Membran aufgebaut ist. Wie kann man die Kapazitätsänderung praktikabel in ein elektrisches Signal umwandeln?
- f) (2 Punkte) In einem gekoppelten Prozess liegen zwei Stell- und zwei Regelgrößen vor. Skizzieren Sie die Idee der Entkoppelungsregelung.
- g) (1 Punkt) Vielfach haben wir das Systemverhalten mit der gemessenen Sprungantwort charakterisiert. Nennen Sie zwei Gründe, warum dies sinnvoll ist.
- h) (1 Punkt) Nennen Sie zwei Gründe, die für die Verwendung einer stationären Vorsteuerung sprechen.
- i) (1 Punkt) Was ist die Idee der dynamischen Vorsteuerung? Was muss dabei beachtet werden?
- j) (1 Punkt) In einem Regelkreis mit I-Anteil im Regler stellt sich ein stationärer Zustand ein. Erklären Sie, warum dann die Regelabweichung gleich null sein muss.
- k) (1 Punkt) Anhand der gemessenen Sprungantwort eines Systems vermuten Sie, dass es sich um ein IT₁-System handelt. Wie lautet die Übertragungsfunktion? Geben Sie eine Möglichkeit an, wie Sie die Parameter ermitteln können.
- l) (1 Punkt) Was versteht man unter der „direkten Vorgabe“?
- m) (2 Punkte) Was ist notwendig, um eine instabile Regelstrecke zu stabilisieren? Was hat das für die Begrenzung der erreichbaren Regelgüte zur Folge?
- n) (1 Punkt) Was versteht man unter der „Linke-Hand-Regel“ beim Nyquist-Verfahren?
- o) (1 Punkt) Kann man durch die Anwendung des WOK-Verfahrens die Stabilität einer Regelstrecke untersuchen?
- p) (2.5 Punkte) Skizzieren Sie das Blockschaltbild eines Prozesses mit Beobachter. Die Strecke soll als einzelner Block dargestellt werden.

„Grundlagen der Mess- und Regelungstechnik“

Prüfung Wintersemester 2017/18

Teil 2: Rechenteil

9 LP

7. März 2018

Zeitraum: 10:15 - 12:15 Uhr

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, zwei beschriebene Blätter

Name, Vorname: _____

Matr. Nr: _____

Studiengang: _____

Abschluss: Bachelor Master Diplom

GMRT-Übungsschein im Wintersemester 20__/__ erhalten.

	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
Aufgabe 1	5	
Aufgabe 2	7	
Aufgabe 3	8	
Aufgabe 4	8	
Aufgabe 5	4	
Σ Rechenteil	32	

1. Aufgabe: Modellbildung

(5 Punkte)

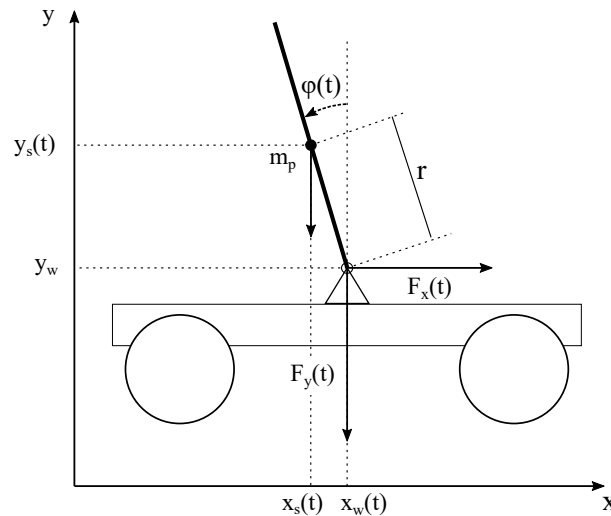


Abbildung 1: Aufrechtes Pendel auf einem Wagen

Sie sollen die Modellbildung für ein aufrechtes Pendel auf einem beweglichen Wagen durchführen, wie in Abbildung 1 skizziert. Die Konstanten θ (Massenträgheitsmoment des Pendels am Schwerpunkt $\{x_s, y_s\}$), m_p (Masse des Pendelstabs) und g (Erdbeschleunigung) sind bekannt.

- a) (1.5 Punkte) Stellen Sie die Drehimpulsbilanz um den Schwerpunkt am Punkt (x_s, y_s) und den Impulserhaltungssatz in x - und y -Richtung auf. Die Reibungskräfte im Lager sollen vernachlässigt werden. Ermitteln Sie einen funktionalen Zusammenhang zwischen x_s und x_w sowie zwischen y_w und y_s . Die Gleichungen sollen soweit detailliert werden, dass nur noch die Variablen φ , F_x , F_y , x_s , y_s , x_w , y_w sowie deren Ableitungen und die Parameter r , θ , m_p und g enthalten sind.

Quereinstieg: Durch Umformen, Einsetzen und Linearisieren um den stationären Arbeitspunkt $\varphi_s = 0$ erhalten Sie das folgende DGL-System. Rechnen Sie mit diesem System weiter:

$$(\theta + m_p r^2) \cdot \ddot{\varphi}(t) = m_p r \cdot (\ddot{x}_w(t) + g \varphi(t)) \quad . \quad (1)$$

Es gelten folgende Notationen:

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L}\{x_w(t)\} & , & & P(s) &= \mathcal{L}\{\varphi(t)\} & , \\ U(s) &= \mathcal{L}\{U_M(t)\} & , & & V(s) &= \mathcal{L}\{v_x(t)\} & . \end{aligned}$$

- b) (0.5 Punkte) Überführen Sie die Differentialgleichung aus Gleichung 1 in den Laplaceraum und geben Sie die Übertragungsfunktion $G_P = P(s)/X(s)$ an. Gehen Sie davon aus, dass die Anfangsbedingungen der Ruhelage entsprechen.
- c) (1.5 Punkte) Die Geschwindigkeit $v_x(t)$ des Wagens lässt sich durch Einstellen der Spannung $U_M(t)$ eines Motors beeinflussen. In Abbildung 2 ist ein Sprungexperiment für dieses System zu sehen. Identifizieren Sie eine passende Übertragungsfunktion $G(s) = V(s)/U(s)$ mit einem Verfahren nach Wahl.

Quereinstieg: Rechnen Sie ab d) auf jeden Fall mit folgender Übertragungsfunktion weiter:

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{0.3s + 1} e^{-0.5s} \quad . \quad (2)$$

- d) (1.5 Punkte) Für die Geschwindigkeit des Wagens gilt der Zusammenhang $v_x(t) = \dot{x}_w(t)$. Geben Sie die Übertragungsfunktion $G_M = X(s)/U(s)$ an. Ist die gesamte Strecke $G_S = G_P G_M$ stabil? Begründen Sie ihre Antwort.

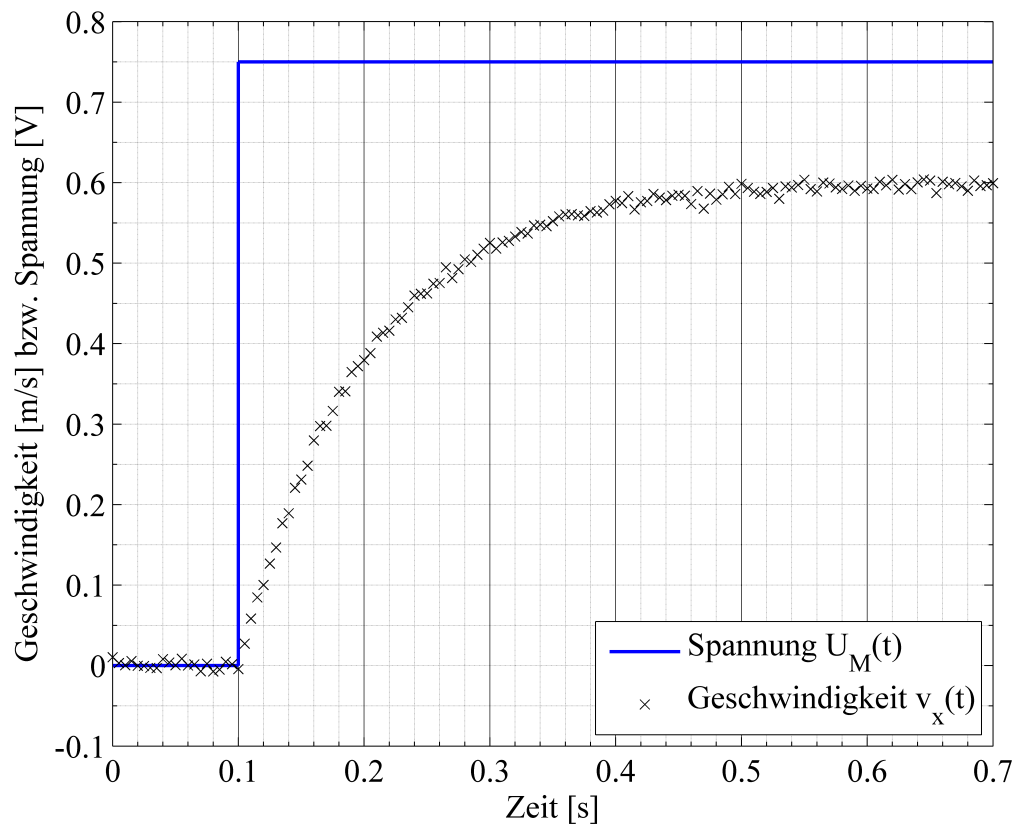


Abbildung 2: Sprungversuch Motor

Berechnungsformeln zur Bestimmung von Zeitkonstanten:

$$T_1 = \frac{t_2 - t_1}{\ln \frac{y_{max} - y_1}{y_{max} - y_2}} \quad , \quad T_0 = T_1 \ln \left(1 - \frac{y_1}{y_{max}} \right) + t_1 \quad . \quad (3)$$

Formeln und Tabellen für die Methode nach Schwarze:

$$T_N = \frac{1}{3} (\alpha_{10} \cdot t_{10} + \alpha_{50} \cdot t_{50} + \alpha_{90} \cdot t_{90}) \quad . \quad (4)$$

$\mu_a = t_{10}/t_{90}$	n	α_{10}	α_{50}	α_{90}
0.046	1	9.52	1.443	0.434
0.137	2	1.88	0.596	0.257
0.207	3	0.907	0.374	0.188
0.261	4	0.573	0.272	0.15
0.304	5	0.411	0.214	0.125
0.34	6	0.317	0.176	0.108
0.37	7	0.257	0.15	0.095

1. Aufgabe Musterlösung [Σ 5,25 Pkte]

a) [Σ 1,5 Pkte]

$$\text{Drehimpulsbilanz: } \theta \cdot \ddot{\varphi} = \sum M = r \cdot F_x \cos(\varphi) - r \cdot F_y \cdot \sin(\varphi) \quad [0.5 \text{ Pkte}] \quad (5)$$

$$\text{Impuls in x: } m \cdot a = m_p \cdot \ddot{x}_s = F_x \quad [0.25 \text{ Pkte}] \quad (6)$$

$$\text{Impuls in y: } m \cdot a = m_p \cdot \ddot{y}_s = -F_y - m_p \cdot g \quad [0.25 \text{ Pkte}] \quad (7)$$

$$x_s = x_w - r \cdot \sin(\varphi) \quad [0.25 \text{ Pkte}] \quad (8)$$

$$y_s = y_w + r \cdot \cos(\varphi) \quad [0.25 \text{ Pkte}] \quad (9)$$

(10)

b) [Σ 0,5 Pkt] Laplace-Transformation des DGL mit wegfallenden Anfangswerten:

$$(\theta + m_p r^2) s^2 \tilde{\varphi} = m_p r \cdot s^2 \cdot \tilde{x} + m_p r g \cdot \tilde{\varphi} \quad [0.25 \text{ Pkte}] \quad (11)$$

$$G_p = \frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{x}} = \frac{m_p r \cdot s^2}{(\theta + m_p r^2) s^2 - m_p r g} \quad [0.25 \text{ Pkte}] \quad (12)$$

c) [Σ 1,75 Pkte]

$$K = \frac{h_{max}}{\tilde{x}_e} = 0,6/0,75 = 0,8 \pm 0,05, \quad [0.5 \text{ Pkte}] \quad (13)$$

$$T_0 = 0 \pm 0,01, \quad [0.25 \text{ Pkte}] \quad (14)$$

$$\text{Beliebiges Zeitpunktpaar } 1t_1 = 0,12 - 0,1 = 0,02, v_1 = 0,1 \quad [0.25 \text{ Pkte}] \quad (15)$$

$$\text{Beliebiges Zeitpunktpaar } 2t_2 = 0,28 - 0,1 = 0,18, v_2 = 0,5 \quad [0.25 \text{ Pkte}] \quad (16)$$

$$T_1 = \frac{t_2 - t_1}{\ln \frac{h_{max} - y_1}{h_{max} - y_2}} = 0,1 \pm 0,07 \quad [0.25 \text{ Pkte}] \quad (17)$$

$$G = \frac{0,8}{1 + 0,1s} \quad [0.25 \text{ Pkte}] \quad (18)$$

(19)

Der zeitliche Versatz 0,1 muss nicht explizit angegeben werden, da er sich rauskürzt. Die Methode von Schwarze ($\nu = 0,045$, $n = 1$), wie auch das Tangentenverfahren ist auch möglich.

d) [Σ 0,5 Pkte]

$$\tilde{v}_x = s \tilde{x} \quad [0.25 \text{ Pkte}] \quad (20)$$

$$G_M = \frac{0,8}{(1 + 0,1s) \cdot s} \quad [0.25 \text{ Pkte}] \quad (21)$$

(22)

e) [Σ 1 Pkte] Die Pole können einfach abgelesen werden.

$$s_1 = 0 \text{ Integratorpol} \quad [0.25 \text{ Pkte}] \quad (23)$$

$$(\theta + m_p r^2) s^2 - m_p r g = 0 \Leftrightarrow s^2 = \frac{m_p r g}{\theta + m_p r^2} = C_1 > 0 \Leftrightarrow s_{1,2} = \pm \sqrt{C_1} \quad [0.5 \text{ Pkte}] \quad (24)$$

(25)

Das System ist instabil, da die konstanten m_p, r, g, θ alle reellwertig und positiv sind und der Pol $-\sqrt{C_1}$ damit in der rechten Halbebene liegt. [0.25 Pkte]

2. Aufgabe: Zustandsraummodell

(7 Punkte)

Bei der Modellierung eines mechanischen Systems erhalten Sie die DGL

$$k_1 \ddot{\varphi}(t) = k_2 u(t) \cos \varphi(t) + k_3 \sin \varphi(t), \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \quad ,$$

wobei alle k_i positive Konstanten sind.

- a) (1 Punkt) Stellen Sie das Differentialgleichungssystem mit dem Zustandsvektor $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ in der Form $\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), u(t))$ auf, wobei folgende Substitutionen gelten.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \dot{\varphi}(t) \\ x_2(t) &= \varphi(t) \end{aligned}$$

- b) (2 Punkte) Linearisieren Sie nun das Differentialgleichungssystem im stationären Arbeitspunkt $x_{1,A}$, $x_{2,A}$ und u_A und stellen Sie das DGL-System in der Form $\Delta \dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A} \Delta \underline{x}(t) + \mathbf{b} \Delta u(t)$ auf. Der Arbeitspunkt muss **nicht** berechnet werden und es gilt

$$\begin{aligned} \Delta x_1(t) &= x_1(t) - x_{1,A} \\ \Delta x_2(t) &= x_2(t) - x_{2,A} \\ \Delta u(t) &= u(t) - u_A \quad . \end{aligned}$$

Quereinstieg: Arbeiten Sie ab c) in jedem Fall mit folgendem System weiter:

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{x}_1(t) \\ \Delta \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin x_{2,A} - \cos x_{2,A} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos x_{2,A} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Delta u(t)$$

- c) (2 Punkte) Wie beurteilen Sie die Stabilität des linearisierten Systems abhängig vom Arbeitspunkt $x_{2,A}$ im Intervall von 0 bis 2π ? Begründen Sie Ihre Antwort.
- d) (1 Punkt) Für welche Werte von $x_{2,A}$ zwischen 0 und 2π ist das linearisierte System steuerbar?
- e) (1 Punkt) Gehen Sie davon aus, dass nur der Zustand $\Delta x_2(t)$ gemessen werden kann. Beurteilen Sie die Beobachtbarkeit des linearisierten Systems.

2. Aufgabe Musterlösung [Σ X Pkte]a) [Σ 1 Pkte]DGL nach φ umstellen, substituieren und das DGL-System aufstellen. Mit

$$\ddot{\varphi} = \underbrace{\frac{k_2}{k_1}}_{=:c} u \cos \varphi + \underbrace{\frac{k_3}{k_1}}_{=:d} \sin \varphi \quad [0.25 \text{ Pkte}]$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\varphi} \quad [0.25 \text{ Pkte}]$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\varphi} = x_1 \quad [0.25 \text{ Pkte}]$$

folgt:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cu \cos x_2 + d \sin x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} [0.25 \text{ Pkte}]$$

b) [Σ 2 Pkt]

$$f_1 = cu \cos x_2 + d \sin x_2$$

$$f_2 = x_1$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix}$$

ergibt in Matrizen eingetragen

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -cu_A \sin x_{2,A} + d \cos x_{2,A} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos x_{2,A} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Delta u$$

[0.25 Pkte für jeden Eintrag in \mathbf{A} und \mathbf{B}], [0.5 Pkte für Einsetzen des Arbeitspunktes]c) [Σ 2 Pkt]Bestimmung der Eigenwerte von Matrix \mathbf{A} und Begründung

$$0 = \left| \begin{pmatrix} 0 & \sin x_{2,A} - \cos x_{2,A} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda I \right| \quad [0.25 \text{ Pkte}]$$

$$\lambda_{1,2} = 0 \pm \sqrt{\sin x_{2,A} - \cos x_{2,A}} \quad [0.25 \text{ Pkte}]$$

Fall	Bedingung	Pollage	Stabilität	Winkel
1	$\sin x_{2,A} < \cos x_{2,A}$	zwei konjugiert komplexe Pole auf der imaginären Achse	grenzstabil	$x_{2,A} < \frac{1}{4}\pi$ oder $x_{2,A} > \frac{5}{4}\pi$
2	$\sin x_{2,A} = \cos x_{2,A}$	zwei Pole im Ursprung ($s = 0$)	instabil	$x_{2,A} = \frac{1}{4}\pi$ oder $x_{2,A} = \frac{5}{4}\pi$
3	$\sin x_{2,A} > \cos x_{2,A}$	jeweils ein Pol auf positiver und negativer realen Achse	instabil	$\frac{1}{4}\pi < x_{2,A} < \frac{5}{4}\pi$
		je Fall [0.25 Pkte]		jeweils [0.25 Pkte]

d) [Σ 1 Pkte]Aufstellen der Matrix Q_S

$$Q_S = \begin{pmatrix} B & A \cdot B \end{pmatrix} \quad [0.25 \text{ Pkte}]$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & \sin x_{2,A} - \cos x_{2,A} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x_{2,A} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos x_{2,A} \end{pmatrix} \quad [0.25 \text{ Pkte}]$$

$$Q_S = \begin{pmatrix} \cos x_{2,A} & 0 \\ 0 & \cos x_{2,A} \end{pmatrix} \quad [0.25 \text{ Pkte}]$$

Für alle Winkel außer $x_{2,A} = \frac{1}{2}\pi$ und $x_{2,A} = \frac{3}{2}\pi$ hat die Matrix Q_S vollen Rang und das System ist steuerbar. [0.25 Pkte]

e) [Σ 1 Pkte]

Aufstellen der Matrix Q_B

$$Q_B = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T \cdot A \end{pmatrix} \quad [0.25 \text{ Pkte}]$$

$$c^T \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sin x_{2,A} - \cos x_{2,A} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad [0.25 \text{ Pkte}]$$

$$Q_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad [0.25 \text{ Pkte}]$$

Das System ist für alle Winkel beobachtbar, da die Matrix Q_B stets vollen Rang hat. [0.25 Pkte]

3. Aufgabe: Wurzelortskurve

(8 Punkte)

Aus einer experimentellen Modellbildung haben Sie das System

$$G_S(s) = \frac{2}{s^2 - (a+1)s + a}, \quad \text{mit } a \in \mathbb{R} \quad (26)$$

erhalten. Der Parameter a konnte aufgrund von Fehlern im Versuchsaufbau nicht genau identifiziert werden. Sie wissen nur, dass er im Bereich zwischen 0 und +1 liegt, also $a \in [0, 1]$.

- a) (2 Punkte) Gehen Sie zunächst von $a = 0$ aus. Es wird vorgeschlagen, das System mit einem P-Regler ($G_R(s) = K_P$) zu stabilisieren. Skizzieren Sie die dazugehörige Wurzelortskurve und diskutieren Sie die Stabilität des geschlossenen Regelkreises. Wurzelschwerpunkt und Winkel von Asymptoten müssen nicht explizit angegeben werden.
- b) (0.5 Punkte) Nun wird ein Regler vorgeschlagen, mit dem sich die WOK aus Abbildung 3 ergibt. Der Verstärkungsfaktor wird so eingestellt, dass die Pole des geschlossenen Regelkreises auf den blauen Quadraten liegen. Nennen Sie zwei Merkmale, die sich ergeben, wenn Sie die Pole stattdessen auf den gekennzeichneten Punkt A bei $\{-2.4, 0\}$ legen.
- c) (1.5 Punkte) Welche Reglerstruktur wurde verwendet? Warum ist diese problematisch?
Hinweis: Es müssen keine Zahlenwerte ausgerechnet werden.

Quereinstieg: Gehen Sie nun von folgendem Regelansatz aus:

$$G_R(s) = K_D \frac{s+1}{s+b}, \quad \text{mit } b \in \mathbb{R}, \quad b > 0. \quad (27)$$

- d) (2 Punkte) Skizzieren Sie die resultierende Wurzelortskurve für $b = 10$.
- e) (2 Punkte) Sie wollen sichergehen, dass für den gesamten Wertebereich von a immer Verstärkungsfaktoren K_D existieren, sodass der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil wird. Für welche Werte von b ist das erfüllt?

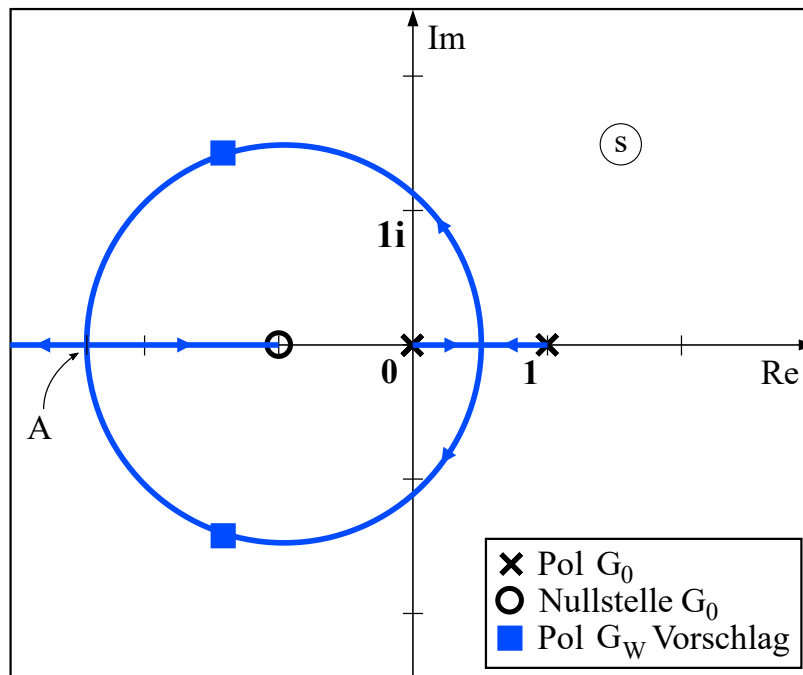
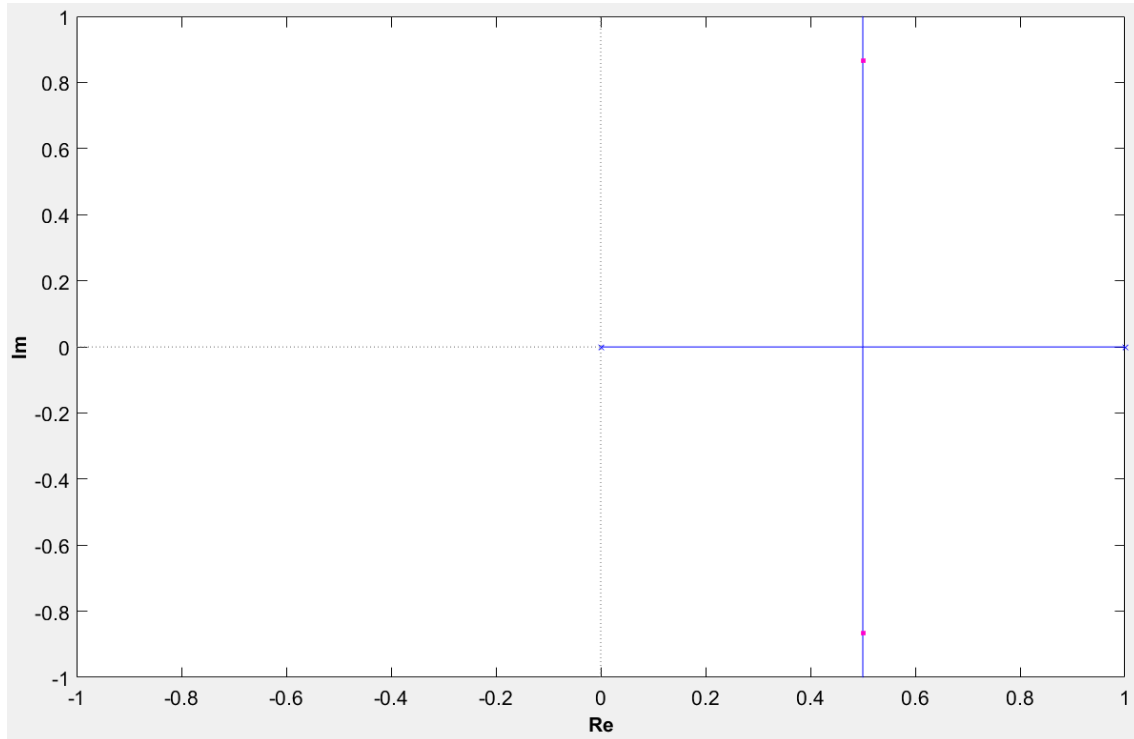


Abbildung 3: Vorschlag für Aufgabenteile b) und c)

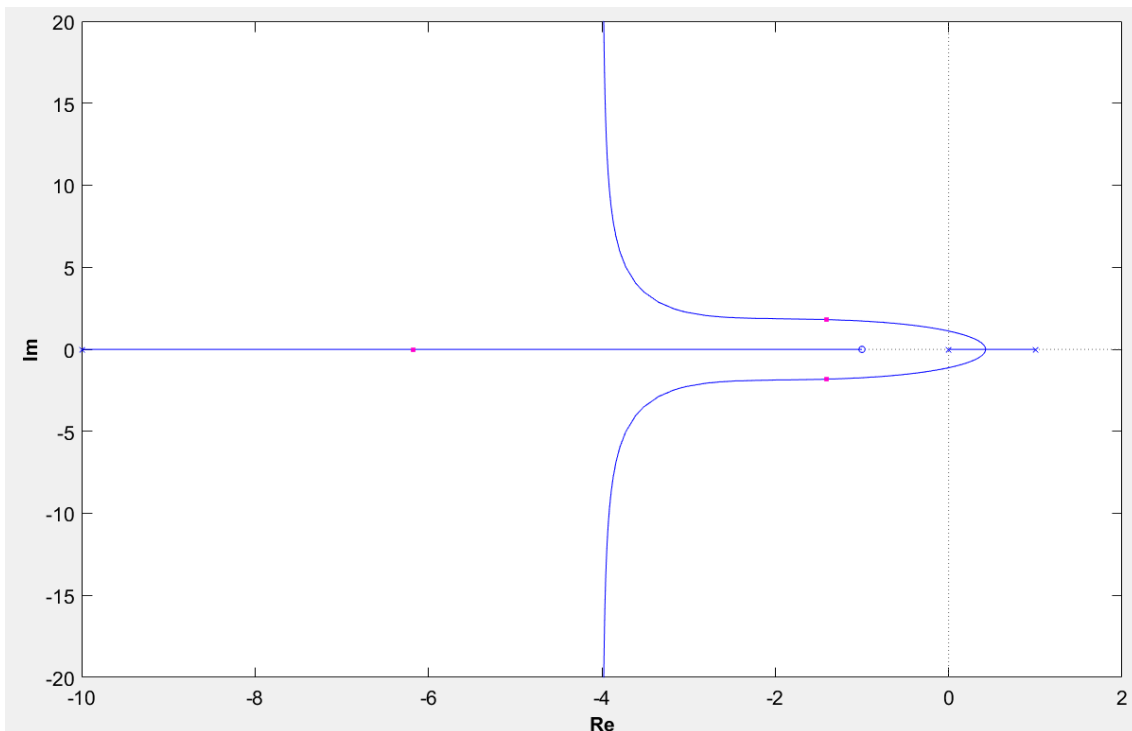
3. Aufgabe: Musterlösung

- a) Mit einem P-Regler ist das System nicht stabilisierbar, denn die Zweige der WOK wären immer in der rechten Halbebene. [1 P]
WOK [1 P]



- b) 1) Die Pole lägen weiter links, daher wäre das geschlossene System schneller. [0.5 P]
2) Da beide Pole reell wären, würde kein Überschwingen auftreten. [0.5 P]
- c) Die vorgeschlagene Regelstruktur ist jedoch problematisch, weil es sich um einen (kontinuierlichen) PD-Regler handelt. [0.5 P] Dieser ist nicht realisierbar, da er einen negativen Polüberschuss aufweist. [0.5 P]

d) WOK [2 P]



e) Die Asymptoten der beiden kritischen Wurzeläste gehen stets nach $\text{Im} \rightarrow \pm\infty$. Die Schnittpunkte der Asymptoten (Wurzelschwerpunkt) sind damit ein oberes Maß für den Realteil der Pole im geschlossenen Kreis. [0.5 P] Über den Wurzelschwerpunkt σ_W lässt sich somit in diesem Fall eine Aussage über die Stabilität des geschlossenen Regelkreises treffen:

$$\sigma_W \stackrel{!}{<} 0 \quad [0.5 \text{ P}]$$

$$\frac{a - b + 1 - (-1)}{2} \stackrel{!}{<} 0$$

$$a + 2 \stackrel{!}{<} b \quad [0.5 \text{ P}]$$

Für unseren Fall ist $a=1$ der kritischste Fall, da hier der Pol am weitesten in der rechten Halbebene liegt. Damit muss für asympt. Stabilität des geschlossenen Regelkreises:

$$3 \stackrel{!}{<} b \quad [0.5 \text{ P}]$$

sein. [Die Höhe des nötigen Stelleingriffes sei hier vernachlässigt]

3. Aufgabe: Messtechnik / PI-Regler

(6.5 Punkte)

Für eine hochpräzise industrielle Bohrmaschine, zu sehen in Abbildung 11, soll schnell ein PI-Regler ausgelegt werden. Als Regelgröße ist der Abstand $a(t)$ [mm] vom Referenzpunkt zum Werkstück vorgesehen. Dieser kann über die Motorspannung $u_M(t)$ [V] eingestellt werden.

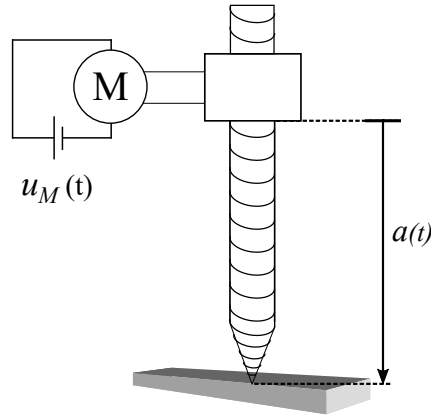


Abbildung 4: Industrielle Bohrmaschine

Bevor ein Sprungexperiment gemacht werden kann, muss die Messung von $a(t)$ aufgebaut werden. Es wird die Schaltung aus Abbildung 5 verwendet. Der graue Kasten ist ein Potentiometer der Länge L , an welchem über einen Schieber die Ausgangsspannung $u_A(t)$ abgegriffen wird (das Potentiometer ist in der vorherigen Abbildung nicht zu sehen). Der Gesamtwiderstand R_P des Potentiometers wird somit auf zwei in Reihe geschaltete Widerstände aufgeteilt:

$$R_1(t) = R_P \frac{L - a(t)}{L} \quad , \quad R_2(t) = R_P \frac{a(t)}{L} \quad . \quad (28)$$

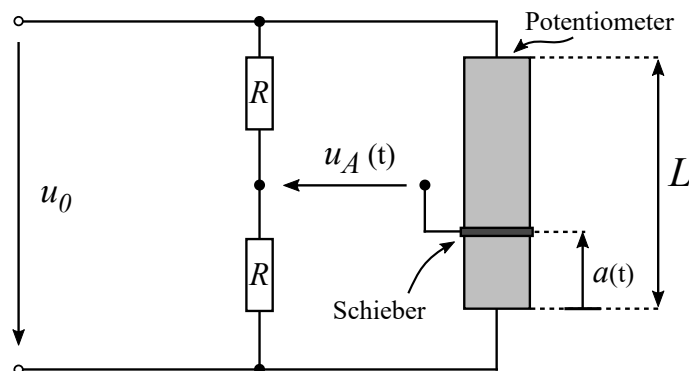


Abbildung 5: Messbrücke zur Abstandsmessung

Rechnen Sie mit folgenden Werten:

$$u_0 = 24V \quad , \quad R = 200\Omega \quad , \quad R_P = 500\Omega \quad , \quad L = 1m \quad .$$

Aufgabenstellungen:

- a) (1 Punkt) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild, bei dem das Potentiometer wie beschrieben in zwei, in Reihe geschaltete Widerstände aufgeteilt ist. Kennzeichnen Sie in Ihrem Schaltbild die Versorgungsspannung der Messschaltung, die Ausgangsspannung und alle Widerstände. Wie nennt man eine solche Schaltung?
- b) (1.5 Punkte) Geben Sie den Zusammenhang von $u_A(t)$ und $a(t)$ an.
- c) (2.5 Punkte) Um einen PI-Regler auszulegen, wurde das Sprungexperiment aus Abbildung 6 durchgeführt. Passen Sie als Strecke ein PT_n -Modell an und geben Sie die Streckenübertragungsfunktion $G_S(s)$ an.

Quereinstieg: Rechnen Sie ab d) auf jeden Fall mit folgender Übertragungsfunktion weiter:

$$G_S(s) = \frac{0.09}{(0.04 s + 0.1)} e^{-0.01 s} \quad (29)$$

- d) (1.5 Punkte) Legen Sie einen PI-Regler mit einem Tabellenverfahren Ihrer Wahl aus und geben Sie die Reglerübertragungsfunktion $G_R(s)$ an. Wählen Sie aus folgenden Einstellregeln:
- Kuhn: normale Einstellung
oder
 - Chien, Hrones, Reswick: Aperiodisch, Störung
oder
 - Betragsoptimum: beliebig

Wichtige Tabellen/Formeln für die Streckenidentifikation:

$$T_N = \frac{1}{3} (\alpha_{10} \cdot t_{10} + \alpha_{50} \cdot t_{50} + \alpha_{90} \cdot t_{90}) \quad (30)$$

$\mu_a = t_{10}/t_{90}$	n	α_{10}	α_{50}	α_{90}
0.137	2	1.880	0.596	0.257
0.207	3	0.907	0.374	0.188
0.261	4	0.573	0.272	0.150
0.304	5	0.411	0.214	0.125
0.340	6	0.317	0.176	0.108
0.370	7	0.257	0.150	0.095
0.396	8	0.215	0.130	0.085
0.418	9	0.184	0.115	0.077
0.438	10	0.161	0.103	0.070

Tabelle 1: Zur Bestimmung der Ordnung n und der Zeitkonstante T_1

Wichtige Tabellen für die Reglerauslegung:

	Reglertyp	Reglerparameter		
		K_P	T_I	T_D
normale Einstellung	P	$1/K$	-	-
	PD	$1/K$	-	$0.33T_\Sigma$
	PI	$0.5/K$	$0.5T_\Sigma$	-
	PID	$1/K$	$0.66T_\Sigma$	$0.167T_\Sigma$
schnelle Einstellung	PI	$1/K$	$0.7T_\Sigma$	-
	PID	$2/K$	$0.8T_\Sigma$	$0.194T_\Sigma$

Tabelle 2: Parameter von Standardreglern nach Kuhn

		Aperiodischer Regelvorgang mit kürzester Dauer		20%-Überschwingen und kleinste Schwingungsdauer	
Regler		Führung	Störung	Führung	Störung
P	K_P	$0.3T_1/(T_0K)$	$0.33T_1/(T_0K)$	$0.7T_1/(T_0K)$	$0.7T_1/(T_0K)$
PI	K_P	$0.35T_1/(T_0K)$	$0.6T_1/(T_0K)$	$0.6T_1/(T_0K)$	$0.7T_1/(T_0K)$
	T_I	$1.2T_1$	$4.0T_0$	$1.0T_1$	$2.3T_0$
PID	K_P	$0.6T_1/(T_0K)$	$0.95T_1/(T_0K)$	$0.95T_1/(T_0K)$	$1.2T_1/(T_0K)$
	T_I	$1.0T_1$	$2.4T_0$	$1.35T_1$	$2.0T_0$
	T_D	$0.5T_0$	$0.42T_0$	$0.47T_0$	$0.4T_0$

Tabelle 3: Parameter von Standardreglern nach Chien, Hrones und Reswick, für $T_1/T_0 > 3$

	Betragsoptimum		
	K_P	T_I	T_D
PI-Regler	$\frac{1}{4K} \frac{n+2}{n-1}$	$\frac{T_1}{3} (n+2)$	-
PID-Regler	$\frac{1}{16K} \frac{7n+16}{n-2}$	$\frac{T_1}{15} (7n+16)$	$T_1 \frac{n^2+4n+3}{7n+16}$

Tabelle 4: Parameter des PI(D)-Reglers nach dem Betragsoptimum

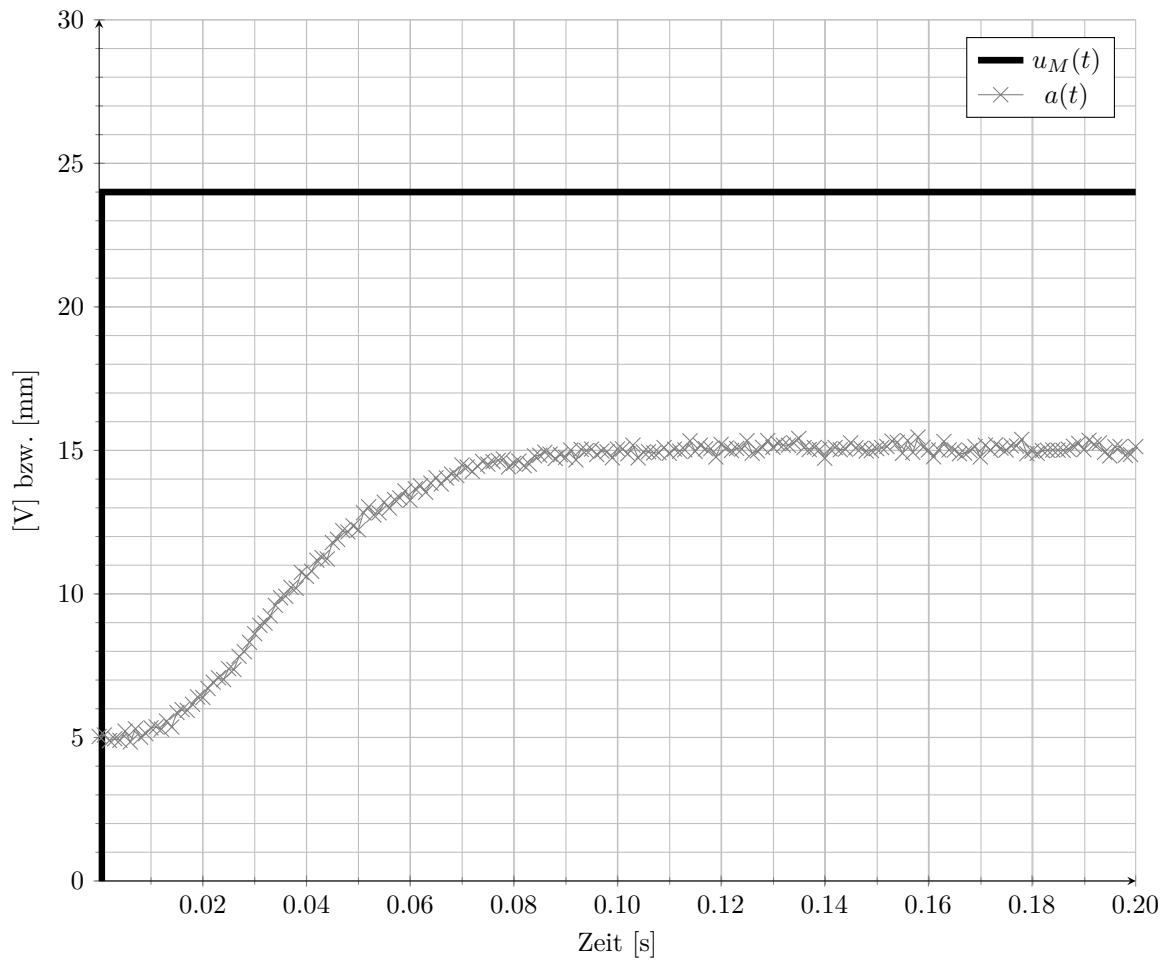


Abbildung 6: Sprungexperiment zur Streckenidentifikation

3. Aufgabe Musterlösung

- a) Siehe Abbildung 12. Für die Struktur [0.25 Pkt], für Ausgangs- und Versorgungsspannung zusammen [0.25 Pkt], für R_1 und R_2 [0.25 Pkt], Benennung als Messbrücke [0.25 Pkt].
- b) Die zwei großen, äußeren Maschen sowie die innere, oben ergeben:

$$\begin{aligned} u_0 &= I_1 2R \quad , \\ u_0 &= I_2 (R_1 + R_2) \quad , \\ I_1 R &= I_2 R_1 + u_a \quad . \quad [0.5 \text{ Pkt}] \end{aligned}$$

Umstellen der ersten beiden nach I und einsetzen in die dritte ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{u_0}{2} &= \frac{u_0}{R_1 + R_2} R_1 + u_a \\ \Rightarrow u_a &= \left(\frac{1}{2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) u_0 \quad . \quad [0.5 \text{ Pkt}] \end{aligned}$$

Einsetzen der Widerstände R_1 und R_2 ergibt

$$u_a = \left(\frac{2a - L}{2L} \right) u_0 \quad . \quad [0.5 \text{ Pkt}]$$

- c) Anpassen als PTn
- d) Reglerauslegung mit Betragsoptimum

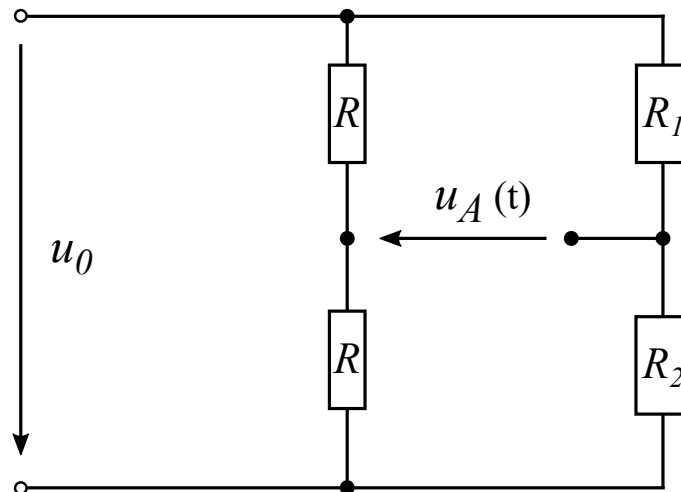


Abbildung 7: Lösung

4. Aufgabe: Frequenzgang

(8 Punkte)

Es soll eine Reglerauslegung per Loop-Shaping für die Strecke $G_S(s)$ durchgeführt werden. Der Frequenzgang der Strecke wurde experimentell bestimmt und ist in Abbildung 10 dargestellt. Es ist bekannt, dass sich die Übertragungsfunktion $G_S(s)$ nur aus Standardregelkreisgliedern **erster** Ordnung zusammensetzt.

- a) (1 Punkt) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion von $G_S(s)$ aus dem Bode-Diagramm in Abbildung 10. Benennen Sie die einzelnen Glieder und geben Sie die Zeitkonstanten an.
- b) (2 Punkte) In einem ersten Ansatz soll ein P-Regler verwendet werden:

$$G_R(s) = K_P \quad . \quad (31)$$

Zur Diskussion stehen Verstärkungsfaktoren von $K_P = 0.5$ und $K_P = 2$. Zeichnen Sie qualitativ die Ortskurve für den offenen Regelkreis für beide Verstärkungsfaktoren und begründen Sie, welcher Wert eine bessere Wahl ist. Geben Sie, falls vorhanden, den Wert der Mindestverstärkung an.

- c) (1 Punkt) Geben sie für einen Verstärkungsfaktor $K_P = 1.2$ die bleibende Regelabweichung bezüglich einer konstanten Führungsgröße an.

Quereinstieg: Um eine bleibende Regelabweichung bzgl. konstanten Führungsgrößen zu vermeiden, soll der Regler um einen I-Anteil erweitert werden. Zudem wird ein Messrauschen oberhalb von $\omega = 100 \text{ rad/s}$ erwartet. Um dies stärker zu unterdrücken, wird der Regler um ein PT_1 -Glieder erweitert. Die Übertragungsfunktion für den Regler lautet:

$$G_R(s) = \frac{K_R}{s(T_M s + 1)} \quad .$$

- d) (2 Punkt) Der Verstärkungsfaktor wird zunächst auf $K_R = 1$ festgelegt. Wählen Sie die Zeitkonstante T_M so, dass der Amplitudengang nur oberhalb von $\omega = 100 \text{ rad/s}$ um genau -60 dB/Dek abfällt (mit der üblichen Approximation der Steigungen). Zeichnen Sie das I- und das PT_1 -Glieder des Reglers in das Bodediagramm in Abbildung 10.
- e) (2 Punkte) Nun soll der Verstärkungsfaktor K_R genauer analysiert werden. Zeichnen Sie den Frequenz- und Amplitudengang des gesamten offenen Regelkreises in das Bodediagramm in Abbildung 10. Wählen sie den Verstärkungsfaktor K_R so, dass der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist und eine Phasenreserve von etwa $\varphi_r = 45^\circ$ erreicht wird.

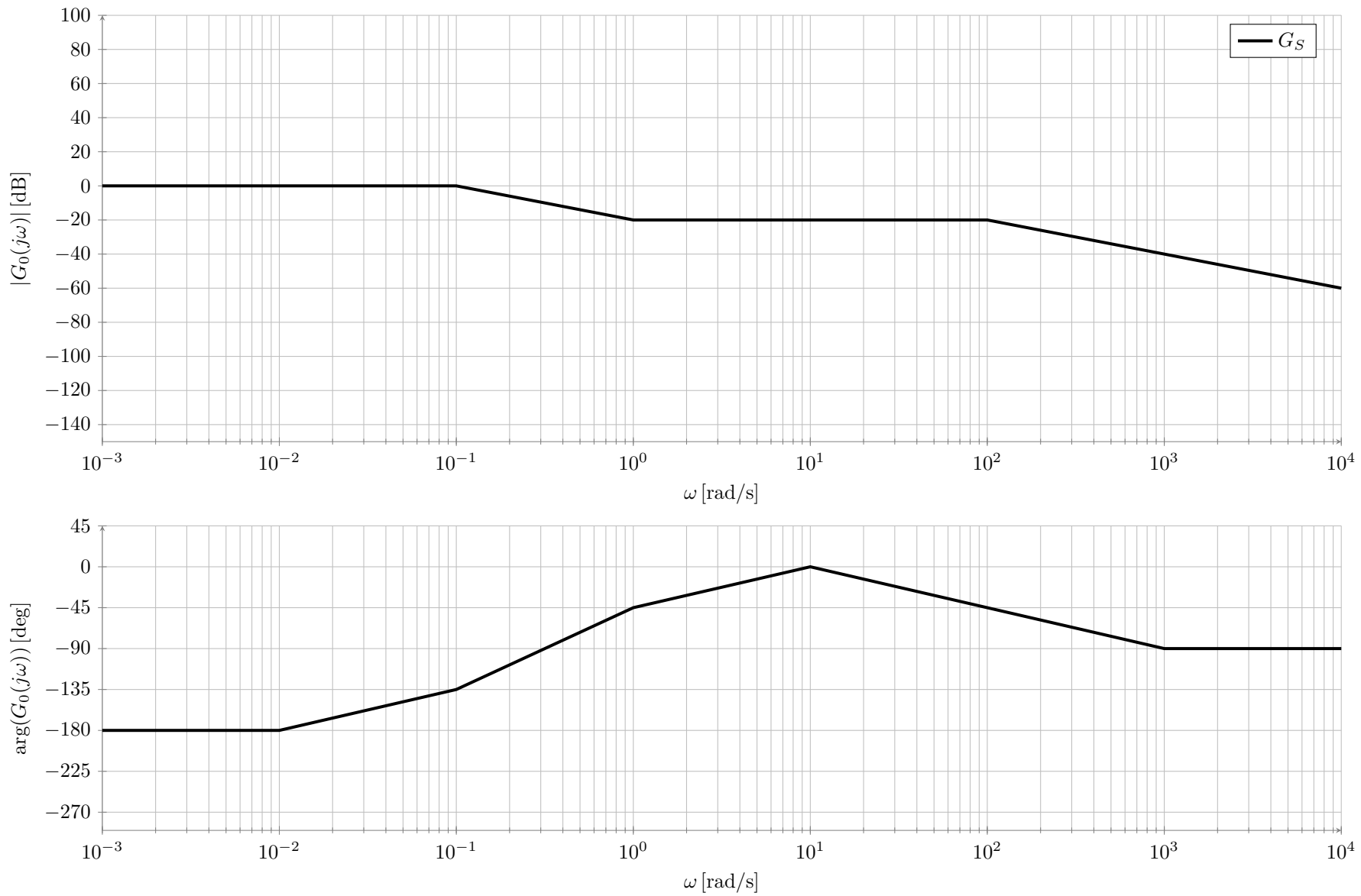


Abbildung 8: Bode-Diagramm für Aufgabe 4

4. Aufgabe Musterlösung

a) Übertragungsfunktion (2 PT_1 -Glieder + 1 PD -Glieder):

$$G_S(s) = \frac{1}{(10s - 1)} \frac{1}{(0.01s + 1)} (s + 1), \quad [1 \text{ Pkt}] \quad (32)$$

b) Nyquistdiagramm

- Nyquistdiagramm für $K_P = 0.5$ richtig gezeichnet [0.5 Pkt]
- Nyquistdiagramm für $K_P = 2.0$ richtig gezeichnet [0.5 Pkt]
- Kritischer Punkt und Grenzwerte $\lim_{\omega \rightarrow 0} |G_0(j\omega)|$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_0(j\omega)|$ [0.5 Pkt]
- Nyquistkriterium: $m_0 = 1$ erfordert Phasendrehung von $\Delta\phi = \pi$ für Stabilität, Mindestverstärkung von $K_P = 1$ [1 Pkt]

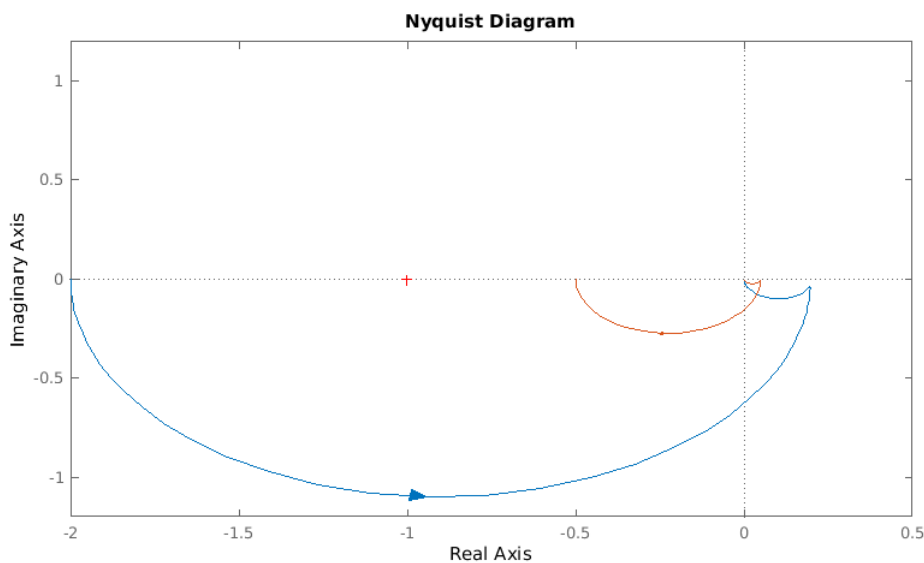


Abbildung 9: Nyquist-Diagramm mit P-Regler

c) Regelabweichung

- Führungsgrößen Übertragung für $\omega = 0$:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{G_0}{1 + G_0} \right| = \left| \frac{-1.2}{-0.2} \right| = 6 \quad (33)$$

d) Bodediagramm

- I-Glied richtig eingezeichnet [1 Pkt]
- PT_1 -Glied richtig eingezeichnet [1 Pkt]

e) Phasenreserve

- Verstärkungsfaktor von $K_P \approx 450$ richtig ermittelt [0.5 Pkt]
- Phasenreserve richtig eingestellt [0.5 Pkt]
- Übertragungsfunktion von G_0 korrekt eingezeichnet [1 Pkt]

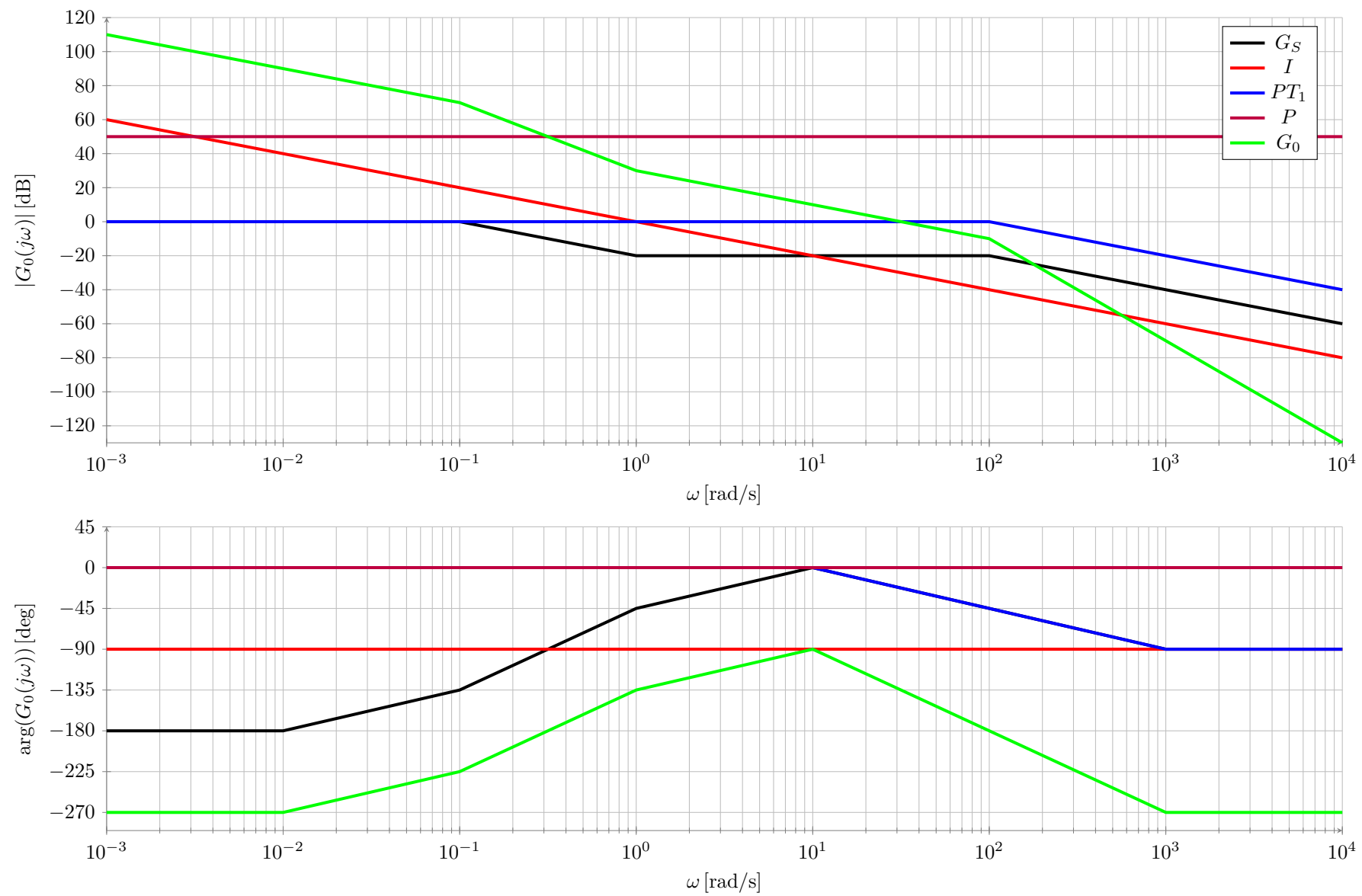


Abbildung 10: Bode-Diagramm für Aufgabe 4

5. Aufgabe: Messtechnik

(4 Punkte)

Für die Messung eines Abstands $a(t)$ in [m] wird die Schaltung aus Abbildung 11 verwendet. Der graue Kasten ist ein Potentiometer der Länge L , an welchem über einen Schieber die Ausgangsspannung $u_A(t)$ abgegriffen wird. Der Gesamtwiderstand R_P des Potentiometers wird somit auf zwei in Reihe geschaltete Widerstände aufgeteilt:

$$R_1(t) = R_P \frac{L - a(t)}{L} \quad , \quad R_2(t) = R_P \frac{a(t)}{L} \quad . \quad (34)$$

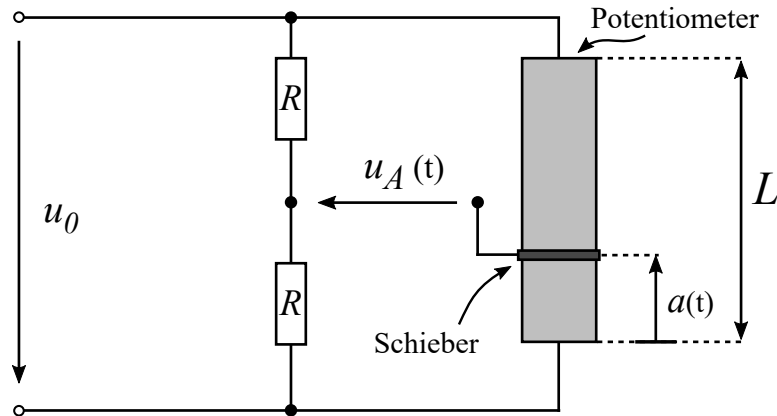


Abbildung 11: Messbrücke zur Abstandsmessung

Rechnen Sie mit folgende Werten.

u_0	24 V
R	200 Ω
R_P	500 Ω
L	1 m

Tabelle 5: Konstanten

- (1 Punkt) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild, bei dem das Potentiometer wie beschrieben in zwei, in Reihe geschaltete Widerstände aufgeteilt ist. Kennzeichnen Sie in Ihrem Schaltbild die Versorgungsspannung, die Ausgangsspannung und alle Widerstände. Wie nennt man eine solche Schaltung?
- (2 Punkte) Berechnen Sie die Empfindlichkeit der Schaltung.
- (1 Punkt) Mit einem idealen Voltmeter messen Sie $u_A = -2.4\text{ V}$. Welcher Abstand a liegt vor?

5. Aufgabe Musterlösung

- a) Siehe Abbildung 12. Für die Struktur [0.25 Pkt], für Ausgangs- und Versorgungsspannung zusammen [0.25 Pkt], für R_1 und R_2 [0.25 Pkt], Benennung als Messbrücke [0.25 Pkt].
- b) Die zwei großen, äußeren Maschen sowie die innere, oben ergeben:

$$\begin{aligned} u_0 &= I_1 2R \quad , \\ u_0 &= I_2 (R_1 + R_2) \quad , \\ I_1 R &= I_2 R_1 + u_a \quad . \quad [0.5 \text{ Pkt}] \end{aligned}$$

Umstellen der ersten beiden nach I und einsetzen in die dritte ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{u_0}{2} &= \frac{u_0}{R_1 + R_2} R_1 + u_a \\ \Rightarrow u_a &= \left(\frac{1}{2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) u_0 \quad . \quad [0.5 \text{ Pkt}] \end{aligned}$$

Einsetzen der Widerstände R_1 und R_2 ergibt

$$u_a = \left(\frac{2a - L}{2L} \right) u_0 \quad . \quad [0.5 \text{ Pkt}] \quad (35)$$

Um die Empfindlichkeit zu berechnen, muss die Ableitung von u_a nach a gebildet werden:

$$E = \frac{du_a}{da} = \frac{1}{L} \quad . \quad [0.5 \text{ Pkt}]$$

- c) Einsetzen von $u_a = -2.4V$ und auflösen nach a ergibt:

$$a = 0.4m \quad . \quad [1 \text{ Pkt}]$$

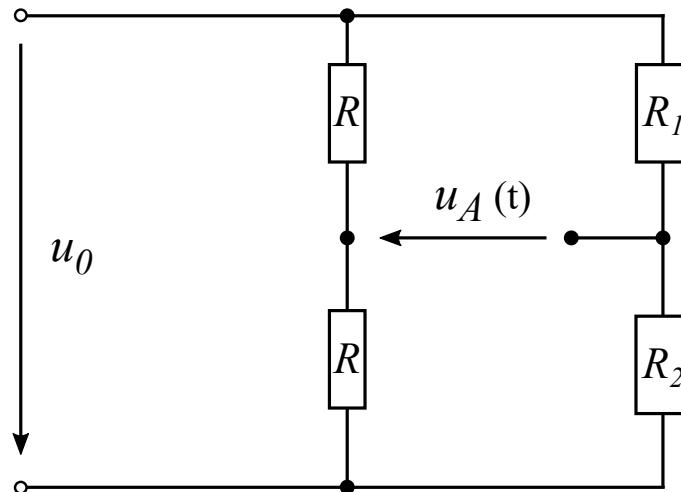


Abbildung 12: Lösung