Klausur im Lehrgebiet

Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie

- Prof. Dr.-Ing. Thomas Sikora -

Name: .... Vorname: ....

Matr.Nr.: ....

Ich bin mit der Veröffentlichung des Klausurergebnisses
unter meiner verkürzten Matrikelnummer einverstanden: ☐ Ja

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Max. Punktezahl	10	10	10	10	40
Erreichte Punktezahl					

Hinweise:

1. Schreiben Sie die Lösungen jeweils direkt auf den freien Platz unterhalb der Aufgabenstellung.
2. Die **Rückseiten** können bei bedarf zusätzlich beschrieben werden. Nummerierungen in diesem Fall nicht vergessen.
3. Sollte auch der Platz auf der Rückseite nicht ausreichen, bitte **kein eigenes Papier verwenden**. Die Klausuraufsicht teilt auf Anfrage **zusätzlich leere Blätter** aus.
4. **Nichtprogrammierbare** Taschenrechner sind als Hilfsmittel erlaubt!
5. Es ist ein einseitig beschriebenes DIN A4-Blatt zur Lösung dieser Klausur zugelassen!
6. Bearbeitungszeit: **90 min.**
7. Bitte **keinen Bleistift und keinen Rotstift** verwenden!

Inhaltsverzeichnis

1 Wahrscheinlichkeit und Zufallsvariablen 10 Punkte

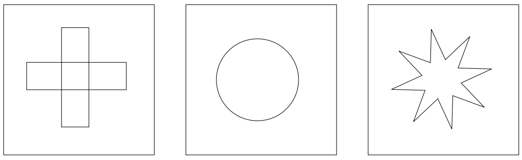
1.1 Erläutere anhand der Kolmogoroff-Axiome welche der folgenden Aussagen stimmen bzw. nicht stimmen. 4 P

a) $P(\Omega \cup (Z \cap Z)) = 0,5$ 1 P

b) $P(E \cup \overline{E}) = 0$ 1 P

c) $P(B \cap C) = -0,1$ 1 P

d) $P(B) - P(A) + P(A \cup \overline{B}) = 1$, mit $A \cap \overline{B} = \emptyset$ 1 P



1.2 4 P

Ein Memory Spiel enthält 11 Karten. Davon zeigen 2 ein Kreuz, 4 einen Kreis und 5 einen Stern. Die Karten werden verdeckt auf einen Tisch gelegt und gemischt, sodass nicht bekannt ist, welches Symbol auf der unteren Seite der Karte abgebildet ist.

a) Es werden nacheinander zwei beliebige Karten aufgedeckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das die Symbole Kreuz und Kreis zu sehen sind? 1 P

b) Es sind wieder alle Karten verdeckt und gemischt auf dem Tisch verteilt. Es werden nacheinander zwei Karten umgedreht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei **nicht** gleiche Symbole zu sehen sind? 2 P

c) Es sind wieder alle Karten verdeckt und gemischt auf dem Tisch verteilt. Es werden zwei Karten aufgedeckt, doch dieses Mal wird die erste nach ihrer Aufdeckung wieder umgedreht und die Karten neu gemischt. Bei dieser Vorgehensweise, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines der beiden aufgedeckten Symbole Ecken hat? 1 P

1.3 In einer Schachtel liegen 100 Widerstände. Ihre Werte sind 20, 100 und 47Ω, ihre Toleranzen sind 5% und 10%. Die Verteilung ist gegeben durch: 2 P

R/Ω	5%	10%
20	5	25
100	10	20
47	15	25

Folgende Ereignisse sind definiert:
A = Ein 20Ω Widerstand wird gezogen.
B = Ein Widerstand mit 5% Toleranz wird gezogen.
C = Ein 47Ω Widerstand wird gezogen.
D = Ein 100Ω Widerstand mit 5% Toleranz wird gezogen.
Berechnen Sie: $P(A \cap B)$, $P(B \cap D)$, $P(D \cup C)$, $P(A|B)$.

2 Verteilungsfunktion und Erwartungswerte 10 Punkte

2.1 Eine Zufallsvariable X habe die VDF $p_X(x) = ce^{-b|x|} + a$, $b > 0$. 4 P

a) Bestimme die Koeffizienten a und c. 2 P

b) Bestimme und skizziere die Verteilungsfunktion! 2 P

2.2 X sei $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. 3 P

a) Berechne den Korrelationskoeffizienten $\rho(X, Y)$ für $Y = X^2$. 3 P

2.3 Der Erwartungswert einer transformierten Zufallsvariablen $g(X, Y)$ ist $E[g(X, Y)] = \int\limits_{\forall x} \int\limits_{\forall y} g(x, y) p_{XY}(x, y) \; dy \; dx$. 3 P

a) Zeige, dass $E[(X+Y)^2] = E[X^2] + E[Y^2] + 2E[XY]$ ist. 3 P

3 Rauschreduktion 10 Punkte

3.1 Gegeben sei weißes Rauschen $\{W(n)\}$ mit der AKF $R_{WW}(k) = \sigma_W^2 \delta(k)$ und ein MA-Prozess $\{X(n)\}$ mit Musterfolgen $x(n) = \sum_{l=0}^{1} a_l w(n-l) = [a_0 w(n) + a_1 w(n-1)]$, mit $a_0 > 0$ und $a_1 < 0$. 6 P

a) Berechne $R_{XX}(k)$ und skizziere die Autokorrelationsfunktion. 3 P

b) Berechne und skizziere das zugehörige Leistungsdichtespektrum. 2 P

c) Gib die Werte der normierten AKF $\rho_{XX}(k)$ an. 1 P

3.2 Gegeben sei ein rauschgestörtes Signal $Y(n) = X(n) + N(n)$, wobei das Nachrichtensignal $X(n)$ und das Rauschsignal $N(n)$ ein Leistungsdichtespektrum $S_{XX}(\Omega) = \sigma_X^2$ bzw. $S_{NN}(\Omega) = \sigma_N^2 = \frac{1}{\alpha}\sigma_X^2$ besitzen. Das Rauschsignal ist nicht mit dem Nachrichtensignal korreliert. 4 P

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion und die Impulsantwort des optimalen nicht-kausalen WK-Filters mit Indexmenge von $\{-\infty; +\infty\}$! 2 P

b) Berechnen Sie das SNR ohne Filterung bzw. bei optimaler Filterung! $(\min\{\sigma_R^2\} = \sigma_X^2 - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{S_{XX}(\Omega)\cdot S_{XX}(\Omega)}{S_{XX}(\Omega)+S_{NN}(\Omega)} d\Omega)$ 2 P

4 WK-Filter und Lineare Prädiktion 10 Punkte

4.1 Nennen Sie die drei Einsatzbereiche des WK-Filters und beschreiben Sie die zugehörigen Kanaleigenschaften. 3 P

4.2 Eine Zufallsvariable Y soll mit der linearen Funktion $Y = \alpha \cdot X$ der Zufallsvariablen X so geschätzt werden, dass der mittlere quadratische Fehler $E[(Y - \alpha X)^2]$ zum Minimum wird. 7 P

a) Berechne α. 2 P

b) Zeige, dass der Korrelationskoeffizient $\rho_{XY} = 1$, wenn α positiv, und $\rho_{XY} = -1$, wenn α negativ ist. 2 P

c) Ein diskretes Signal habe folgende normierte Autokorrelationsfolge: $\rho_{xx}[n] = \{1, 0.7, 0.2, 0.03, ...\}$. Berechne die Filterkoeffizienten des optimalen Prädiktionsfilters zweiter Ordnung nach dem Wiener-Hopf-Ansatz! *Hinweis:* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ 3 P