

Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie

- Prof. Dr.-Ing. Thomas Sikora -

Name:

Vorname:

Matr.Nr:

Ich bin mit der Veröffentlichung des Klausurergebnisses
unter meiner Matrikelnummer einverstanden: Ja

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Max. Punktezahl	10	8	9	13	40
Erreichte Punktezahl					

Hinweise:

1. Schreiben Sie die Lösungen jeweils direkt auf den freien Platz unterhalb der Aufgabenstellung.
2. Die **Rückseiten** können bei Bedarf zusätzlich beschrieben werden. Nummerierungen in diesem Fall nicht vergessen.
3. Sollte auch der Platz auf der Rückseite nicht ausreichen, bitte **kein eigenes Papier verwenden**. Die Klausuraufsicht teilt auf Anfrage **zusätzlich leere Blätter** aus.
4. **Nichtprogrammierbare** Taschenrechner sind als Hilfsmittel erlaubt!
5. Es ist ein einseitig beschriebenes DIN A4-Blatt zur Lösung dieser Klausur zugelassen!
6. Bearbeitungszeit: **90 min**.
7. Bitte **keinen Bleistift und keinen Rotstift** verwenden!

Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 29.07.2015	Blatt: 1
--	--	----------

Inhaltsverzeichnis

1	Wahrscheinlichkeit und Zufallsvariablen	3
2	Verteilungsfunktion	6
3	Wiener-Kolmogoroff-Filterung	8
4	Nachrichtenquellen	9

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 29.07.2015</p>	<p>Blatt: 2</p>
---	--	-----------------

1 Wahrscheinlichkeit und Zufallsvariablen

10 Punkte

- 1.1 Erläutere anhand der Kolmogoroff-Axiome welche der folgenden Aussagen stimmen bzw. nicht stimmen. 4 P
- a) $P(Z \cap (\Omega \cup Z)) < 0$ 1 P
- b) $P(\Omega \cup C) = 1$ 1 P
- c) $P(E \cup E) = 2 \cdot P(E)$ 1 P
- d) $P(\overline{\Omega} \cap \Omega) = 0$ 1 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 29.07.2015</p>	<p>Blatt: 3</p>
---	--	-----------------

- 1.2 Ein Kasten enthält zwei weiße, zwei rote und drei grünen Bälle. Zwei Bälle werden gezogen, der erste Ball wird nicht zurückgelegt. 4 P
- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei weiße Bälle zu ziehen? 1 P
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei weiße Bälle zu ziehen, wenn man den ersten Ball zurücklegen würde? 1 P
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, an zweiter Stelle eine grüne Kugel zu ziehen? 2 P

Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 29.07.2015	Blatt: 4
---	--	----------

- 1.3 In einer Schachtel liegen 100 Widerstände. Ihre Werte sind 20, 100 und 47 Ω , ihre Toleranzen sind 5% und 10%. Die Verteilung ist gegeben durch: 3 P

R/ Ω	5%	10%
20	15	10
100	25	15
47	5	30

Folgende Ereignisse sind definiert:

A = Ein 20 Ω Widerstand wird gezogen.

B = Ein Widerstand mit 10% Toleranz wird gezogen.

C = Ein 47 Ω Widerstand wird gezogen.

- a) Berechne: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$. 2 P

- b) Sind $P(A)$ und $P(B)$ statistisch unabhängig? Begründe. 1 P

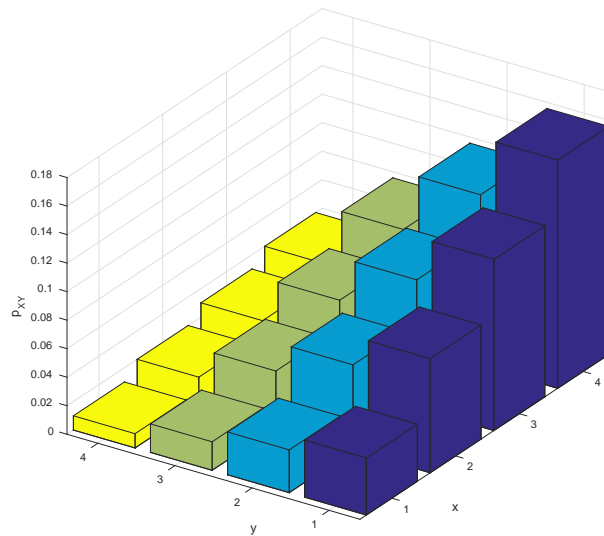
Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 29.07.2015	Blatt: 5
---	--	----------

2 Verteilungsfunktion

8 Punkte

2.1 Gegeben sei folgende Verbundverteilungsdichte $p_{XY}(x, y)$:

5 P



$p_{XY}(x, y)$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$y=4$
$x=1$	0.04	0.03	0.02	0.01
$x=2$	0.08	0.06	0.04	0.02
$x=3$	0.12	0.09	0.06	0.03
$x=4$	0.16	0.12	0.08	0.04

a) Bestimme die Verteilungsdichten $p_X(x)$ und $p_Y(y)$.

2 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 29.07.2015</p>	<p>Blatt: 6</p>
--	--	-----------------

b) Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig? Begründe. 1,5 P

c) Bestimme die Werte für $P(x = 1, y = 3)$, $P(x = 1|y = 3)$ und $P(y = 1|x = 3)$ 1,5 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 29.07.2015</p>	<p>Blatt: 7</p>
--	---	-----------------

2.2 Es sei X eine Zufallsvariable mit $\mathcal{N}(0, 1)$ Verteilung und weiter $Y = X^3$. 5 P

a) Bestimme die Verteilungsdichte $p_Y(y)$. 2 P

b) Begründe, dass $E[Y] = 0$ gilt. 1 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 29.07.2015</p>	<p>Blatt: 8</p>
---	--	-----------------

3 Wiener-Kolmogoroff-Filterung

9 Punkte

- 3.1 Nenne die drei Einsatzbereiche des WK-Filters und beschreibe die zugehörigen Kanaleigenschaften. 3 P
- 3.2 Gegeben ist eine stationäre mittelwertfreie Nachrichtenquelle $X(n)$. 7 P
- a) Leite die Leistung des Schätzfehlers $d(n) = x(n) - z(n)$ bei **optimaler Prädiktion** der Ordnung N her und drücke diese als Funktion der Autokorrelationsmatrix (**Matrixschreibweise!**) aus. Hinweis: Denke an das Orthogonalitätsprinzip! 3 P

Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 29.07.2015	Blatt: 9
--	--	----------

- b) Für das in b) gegebene Signal, berechne die Filterkoeffizienten des optimalen Prädiktionsfilters zweiter Ordnung nach dem Wiener-Hopf-Ansatz! Gegeben seien folgende normierte Korrelationswerte $\rho_{XX}(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.5 & 0.7 & 0.9 \end{bmatrix}$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4$. 3 P

Hinweis: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 29.07.2015	Blatt: 10
---	--	-----------

4 Nachrichtenquellen

13 Punkte

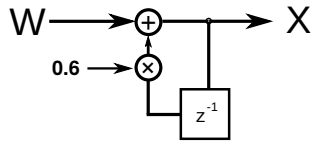
- 4.1 Gegeben sei eine binäre Markovquelle. Mit den Übergangswahrscheinlichkeiten $P(1|0) = 0.6$ und $P(0|1) = 0.5$. 4 P
- a) Zeichne das Markov-Modell mit den beiden Zuständen **0** und **1** und beschrifte es vollständig. 1 P
- b) Es wurde eine **1** gesendet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird nach zwei weiteren Übertragungen eine **0** bzw. **1** gesendet? 1 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 29.07.2015</p>	<p>Blatt: 11</p>
---	--	------------------

- c) Die Übertragung dauere nun über einen langen Zeitraum an. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten dann **0** und **1** auf? Beschreibe, welche Schritte zur Lösung führen, ohne sie explizit auszurechnen. 2 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 29.07.2015</p>	<p>Blatt: 12</p>
---	--	------------------

- 4.2 Gegeben sei ein Weißer Rauschprozess $\{W\}$ mit Mittelwert μ_w und folgendes Kanalmodell 4 P



- a) Bestimme den Mittelwert des Empfangsprozesses $\{X\}$. 1 P

- b) Leite die normierte Autokorrelation des Empfangsprozesses her. 3 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 29.07.2015</p>	<p>Blatt: 13</p>
---	--	------------------

4.3 Gegeben sei die folgende Impulsantwort eines Filters 5 P

$$h(n) = 0.5\delta(n - 1) + 0.5\delta(n + 1)$$

Es werde mittelwertfreies Weißes Rauschen an den Eingang gelegt.

a) Bestimme und zeichne sowohl die Autokorrelationsfolge als auch das Leistungsdichtespektrum des Ausgangs. 5 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 29.07.2015</p>	<p>Blatt: 14</p>
--	--	------------------