Klausur zur Veranstaltung ITPDG WS01/02 (R-

Lösungen Rechenteil

1. Aufgabe

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anwendung der Laplacetransformation auf das DGL-System liefert:

$$\mathcal{L}[\vec{y}\,'](s) = \mathcal{L}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} \right](s) \qquad (1)$$

Setze $\mathcal{L}[\vec{y}](s) = \vec{\underline{Y}}(s)$. Aus Linearität und Ableitungs- (1) regel der Laplacetransformation folgt:

$$s\,\vec{\underline{Y}}(s) - \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \vec{\underline{Y}}(s) + \mathcal{L}\left[\begin{matrix} 0 \\ e^{2t} \end{matrix} \right](s) \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} s-2 & 0 \\ -5 & s-1 \end{pmatrix} \vec{\underline{Y}}(s) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{s-2} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Cramersche Regel liefert: $\left(\vec{\underline{Y}}(s) = \begin{pmatrix} \underline{Y}_1(s) \\ \underline{Y}_2(s) \end{pmatrix} \right)$

$$\underline{Y}_1(s) \overset{(1)}{=} \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ \frac{1}{s-2} & s-1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} s-2 & 0 \\ -5 & s-1 \end{pmatrix}} = \frac{3(s-1)}{(s-2)(s-1)} = \frac{3}{s-2} \qquad (1)$$

$$\underline{Y}_2(s) \overset{(1)}{=} \frac{\det \begin{pmatrix} s-2 & 3 \\ -5 & \frac{1}{s-2} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} s-2 & 0 \\ - & \end{pmatrix}} = \frac{1+15}{(s-2)(s-1)} = \frac{16}{s-2} - \frac{16}{s-1} \quad ($$

R2

zu Aufgabe 1

Rücktransformation ergibt

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{matrix} \mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{s-2}](t) \\ \mathcal{L}^{-1}[\frac{16}{s-2} - \frac{16}{s-1}](t) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 16(e^{2t} - e^{t}) \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$$

Σ 10

2. Aufgabe

$u_t = u_{xx}, \quad u(x,0) = e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \ 0 \le t.$

Gesucht ist $F(\omega,t) = F[u(x,t)](\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Anwendung der Fouriertransformation auf die partielle DGL liefert:

$$\boxed{F[u_t(x,t)](\omega) = F[u_{xx}(x,t)](\omega)} \quad (1) \qquad 1$$

$$F[u_t(x,t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,t) e^{-i\omega x} dx = \frac{d}{dt} F[u(x,t)](\omega) \quad 2$$

$$F[u_{xx}(x,t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}(x,t) e^{-i\omega x} dx = (i\omega)^2 F[u(x,t)](\omega) \quad 2$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{\frac{d}{dt} F(\omega,t) = -\omega^2 F(\omega,t)} \ 1 \Rightarrow F(\omega,t) = c(\omega) e^{-\omega^2 t} \ 1, \quad \omega \in \mathbb{R}, t \ge 0$$

$$F(\omega,0) = F[u(x,0)](\omega) = F[e^{-|x|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \quad 1$$

$$\Rightarrow c(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \ 1 \quad \Rightarrow \boxed{F(\omega,t) = \frac{2}{1+\omega^2} e^{-\omega^2 t}} \ ; \omega \in \mathbb{R}, t \ge 0$$

(R3)

3. Aufgabe

$$y_{n+2} = 4y_n \quad , \quad y_0 = 1 \; , \; y_1 = 2 \; , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Z-Transformation anwenden:

$$Z[y_{n+2}](z) = Z[4y_n](z) \qquad (1)$$

(1)

Verschiebungssatz + Linearität $\Rightarrow$

$$z^2\left(Z[y_n](z) - \frac{y_0}{z^0} - \frac{y_1}{z^1}\right) = 4\, Z[y_n](z) \qquad (1)$$

Setze $Z[y_n](z) = F^*(z)$

$$\Rightarrow \; z^2 F^*(z) - 4F^*(z) - z^2 - 2z = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad F^*(z) = \frac{z(z+2)}{z^2-4} = \frac{z}{z-2} \qquad (1)$$

<u>Rücktransformation</u> Subst. $z = \frac{1}{w}$ (1)

$$F^*\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\frac{1}{w}}{\frac{1}{w}-2} \overset{(1)}{=} \frac{1}{1-2w} = \sum_{n=0}^{\infty} (2w)^n \quad \text{(geometrische Reihe)}$$

$|2w| < 1$ (1)

$$\Rightarrow F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{z^n} \;,\; |z| > 2 \quad \Rightarrow \boxed{y_n = 2^n, \; n \in \mathbb{N}_0}$$

(1) (1)

4. Aufgabe

$$u_t = 4u_{xx} \qquad 0 \le x \le 3 \,, \quad 0 \le t$$

(Σ1

$$u(0,t) = u(3,t) = 0$$

$$u(x,0) = 5\sin(13x)$$

zu Aufgabe 4 . (R4)

Produktansatz $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ liefert

$$X\,T' = 4\,X''\cdot T \quad (1) \Rightarrow \frac{T'}{4T} = \frac{X''}{X} = \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$u(0,t) = u(3,t) = 0 \Rightarrow X(0) = X(3) = 0 \quad (1)$$

I) $$\frac{X''}{X} = \lambda \Leftrightarrow X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(3) = 0$$

Für $\lambda \geq 0$ erhält man nur die triviale Lösung $X \equiv 0$ (wegen den homogenen Randbedingungen) (1)

O.b.d.A. sei $\lambda < 0$. Setze $\lambda = -c^2$, $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\Rightarrow X'' + c^2 X = 0$$

$$\Rightarrow X(x) = a\cos(cx) + b\sin(cx), \quad a,b \in \mathbb{R}$$

$X(0) = 0 \Rightarrow a = 0 \qquad X(3) = b\sin(c3) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 3c = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (1)

oder $b = 0$ (triviale Lösung) $\qquad \Rightarrow \boxed{c_k = k\frac{\pi}{3}}$

$$\boxed{X_k(x) = b_k \sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

II) $$\frac{T'}{4T} = \lambda = -c^2 = -k^2\frac{\pi^2}{9} \Leftrightarrow T' = -k^2\frac{4\pi^2}{9}T \quad (1)$$

$$\boxed{T_k(t) = A_k\, e^{-k^2\frac{4\pi^2}{9}t}}, \quad A_k \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Zu Aufgabe 4

Insgesamt ergibt sich

$$u_k(x,t) = X_k(x) \cdot T_k(t) = b_k \sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right) \cdot A_k e^{-k^2\frac{4\pi^2}{9}t}$$ 1

Setze $b_k A_k = d_k$; $k \in \mathbb{Z}$

Superpositionsprinzip

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right) e^{-k^2\frac{4\pi^2}{9}t}}$$

$u(x,0) = 5\sin(4\pi x)$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right) \stackrel{!}{=} 5\sin(4\pi x)$$

$\Rightarrow d_{12} = 5, \quad d_k = 0 \quad k \neq 12$

$$\Rightarrow u(x,t) = 5\sin(4\pi x)\, e^{-\frac{12^2 \cdot 4\pi^2}{9}t} = \underline{5\sin(4\pi x)\, e^{-64\pi^2 t}}$$ 1

Σ 10