V1

Klausur zur Veranstaltung ITPDG WS 01/02

Lösungen Verständnisteil

1. Aufgabe

Die Funktion $u \equiv 2$ erfüllt die partielle Differentialgleichung ($u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$), die Anfangsbedingungen ($u(x,y,0) = 2$, $u_t(x,y,0) = 0$) und die Randbedingung ($u(x,y,t) = 2$, $x^2+y^2 = 9$) auf den geforderten Bereichen, und ist somit Lösung der gegebenen 2-dimensionalen Schwingungsgleichung.

$\Sigma 6$

2. Aufgabe

Die Fourierreihe s einer Funktion f mit Periode T hat die Gestalt: (1) $s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)$

mit $a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)dx$, $b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)dx$.

$k = 0,1,2,\ldots$ ($b_0 = 0$).

- f_1 ist gerade $\Rightarrow b_k = 0$ $k = 1,2,3,\ldots$ ↯ zu $b_k = 2\frac{(-1)^k}{k}$ $k = 1,2,3,\ldots$

(1)

Fortsetzung 2. Aufgabe

- f_2 ist π-periodisch $\Rightarrow T=\pi$, ferner ist f_2 ungerade $\Rightarrow$

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2kx)$$ 1

Andererseits gilt: $s(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(kx)$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt einen Widerspruch für alle ungeraden $k \in \mathbb{N}$, da $b_k = 0$ und $b_k = 2\frac{(-1)^k}{k}$ gelten muß. 1

- f_3 ist ungerade und 2π-periodisch $\Rightarrow$

$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$ 1. Damit kommt f_3 für die Fourierreihe $s(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(kx)$ in Betracht.

1

$\Sigma\, 6$

V3

3. Aufgabe

$$F^*(z) = F[y_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \frac{1}{z^n} \quad (1)$$

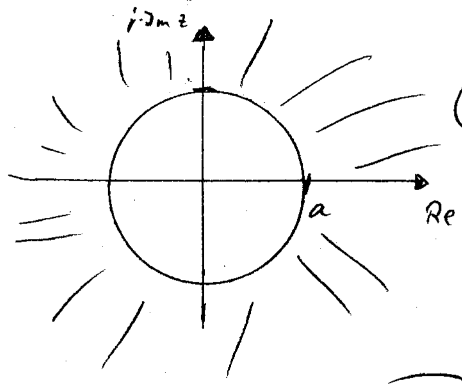
Anwendung vom Wurzel Kriterium (1) auf die Potenzreihe liefert:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|y_n| \frac{1}{|z|^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|y_n|} \cdot \frac{1}{|z|}\right) = a \cdot \frac{1}{|z|} \overset{!}{<} 1 \quad (1)$$

$\Rightarrow$ $a < |z|$. Das heißt die Reihe konvergiert für

$z \in \{ z \in \mathbb{C} : |z| > a \}$. (1)

Skizze



(2)

Σ 6

4. Aufgabe

$u_1(x,y) = \sin(x)$, $u_2(x,y) = 2x + y$

z.B. $u_{yy} = 0$

Σ 6

V4

5. Aufgabe

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & \text{für } 0 \leq t \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Die Fouriertransformierte von f ist definiert als: $(\omega \in \mathbb{R})$

$$F(\omega) = F[f(t)](\omega) \overset{2}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \overset{2}{=} \int_0^{\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$\overset{2}{=} \mathcal{L}[g(t)](i\omega)$ (Voraussetzungen an g für die Existenz von $\mathcal{L}[g(t)](i\omega)$ brauchen nicht erwähnt zu werden)

Σ 6

6. Aufgabe

f ist eine stetig-differenzierbare Funktion, f und f' sind von exp. Ordnung. Es ex. $\gamma \geq 0$, so daß $\mathcal{L}[f](s)$ und $\mathcal{L}[f'](s)$ für $Re(s) > \gamma$ ex. Die Voraussetzungen für die Ableitungsregel sind erfüllt und es gilt somit: (2)

(1)

$$\boxed{\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\,\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0), \quad Re(s) > \gamma} \quad (1)$$

Da $s \in \mathbb{R}$ ist $\Rightarrow$ $Re(s) \overset{1}{=} s$. Für die Berechnung von $\lim_{s \to \infty} (s\,F(s))$ ist $s = Re(s) \leq \gamma$ nicht von Bedeutung, so daß $s = Re(s) > \gamma$ keine Einschränkung darstellt. Es gilt also: (1)

$$\lim_{s \to \infty} (s\,F(s)) \overset{(1)}{=} \lim_{\substack{s \to \infty \\ s > \gamma}} \left(f(0) + \mathcal{L}[f'(t)](s) \right) \overset{\triangledown}{=} f(0) + 0 \quad (1)$$

$\triangledown$ $\lim_{s \to \infty} \mathcal{L}[f'(t)](s) = 0$ (Vorlesung, f' ist stetig und von exp. Ordnung)

(2) (1)