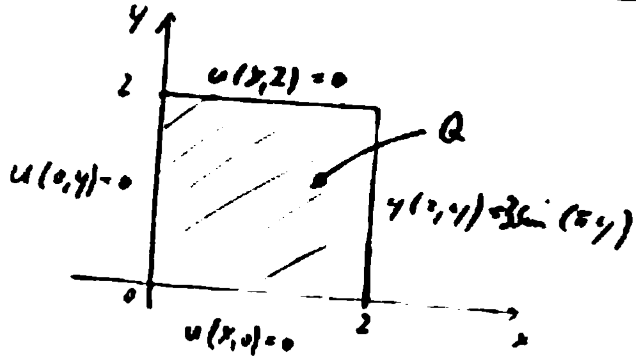
(K) - **Musterlösung Okklusionsklausur MPDG SS 2002**

1) $u_{xx} + u_{yy} = 0$



Trennungsansatz $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$ liefert:

$$X''Y + XY'' = 0 \iff \boxed{-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda \in \mathbb{R}} \; *$$

$u(x,0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$
$u(x,2) = 0 \Rightarrow Y(2) = 0$ } Also ergibt sich ein homogenes RWP für $Y(y)$:

$$\boxed{Y'' - \lambda Y = 0 \;,\; Y(0) = Y(2) = 0}$$

Setze $\lambda = -c^2$, $c \in \mathbb{R}$ (für $\lambda \geq 0$ gibt es sonst nur triviale Lsg.)

$\Rightarrow Y'' + c^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = a\cos(cy) + b\sin(cy)$, $a, b \in \mathbb{R}$

$Y(0) = 0 \Rightarrow a = 0$ $\quad Y(2) = 0 \Rightarrow b\sin(c2) = 0$

$\Rightarrow 2c = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \boxed{c_k = \frac{k\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2}$ $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \boxed{Y_k(y) = b_k \sin\left(\frac{k\pi}{2} y\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$, $b_k \in \mathbb{R}$

- Für $X(x)$ ergibt sich dann aus $*$:

(R2)

$$-\frac{X_k''}{X_k} = -\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 \Leftrightarrow X_k'' - \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 X_k = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{X_k(x) = A_k e^{\left(\frac{k\pi}{2}\right)x} + B_k e^{-\left(\frac{k\pi}{2}\right)x}}, \quad A_k, B_k \in \mathbb{R}, \; k \in \mathbb{Z}$$

Mit dem Superpositionsprinzip folgt:

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{2}y\right)\left(A_k e^{\left(\frac{k\pi}{2}\right)x} + B_k e^{-\left(\frac{k\pi}{2}\right)x}\right)}$$

$(b_k = 1$ oBdA$)$

A_k, B_k werden mit den Randwerten $u(0,y) = 0$ und $u(2,y) = 3\sin(\pi y)$ bestimmt:

$$u(0,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{2}y\right)\left(A_k + B_k\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow A_k + B_k = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\boxed{A_k = -B_k}}_{\mathrm{I}} \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$u(2,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{2}y\right)\left(A_k e^{\frac{k\pi}{2}\cdot 2} + B_k e^{-\frac{k\pi}{2}\cdot 2}\right) \stackrel{!}{=} 3\sin(\pi y)$$

$$\Rightarrow \boxed{A_k e^{k\pi} + B_k e^{-k\pi} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq 2 \\ 3 & \text{für } k = 2 \end{cases}}$$

mit I folgt: $\boxed{A_k = B_k = 0 \text{ für } k \neq 2}$ und

$$\boxed{A_2 = \frac{3}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} \quad \text{und} \quad B_2 = \frac{-3}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}}$$

Also

$$\boxed{u(x,y) = 3\sin(\pi y)\,\frac{\sinh(\pi x)}{\sinh(2\pi)}}.$$

2) $\sinh(t) + \int_0^t f(t-\tau)\sinh(\tau)\,d\tau = t e^t$ (RT)

Anwendung der Laplacetransformation liefert:

$$\mathcal{L}[\sinh(t)](s) + \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\tau)\sinh(\tau)\,d\tau\right] = \mathcal{L}[t e^t](s)$$

Setze $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$ Mit der Faltungsregel folgt:

$$\frac{1}{s^2-1} + F(s)\cdot\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad F(s) = (s^2-1)\left(\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s^2-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad F(s) = \frac{s^2-1-(s-1)^2}{(s-1)^2} = \frac{2(s-1)}{(s-1)^2} = \frac{2}{(s-1)}$$

Rücktransformation von $F(s)$ ergibt:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s-1}\right](t) = 2e^t$$

Rechenteil

(R4)

3. Aufgabe

Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) := \begin{cases} \cos t, & -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Hinweis: Partielle Integration

Lösung:

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, e^{-i\omega t} \, dt$$

$$= +\sin t \left(e^{-i\omega t}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + i\omega \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, e^{-i\omega t} \, dt$$

$$= +\left(e^{-i\omega\frac{\pi}{2}} + e^{+i\omega\frac{\pi}{2}}\right) - \left(i\omega \cos t \, e^{-i\omega t}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - (i\omega)^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, e^{-i\omega t} \, dt$$

$$= +\left(e^{i\omega\frac{\pi}{2}} + e^{-i\omega\frac{\pi}{2}}\right) - 0 + \omega^2 \mathcal{F}[f(t)](\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}[f(t)](\omega) = + \frac{e^{i\omega\frac{\pi}{2}} + e^{-i\omega\frac{\pi}{2}}}{1 - \omega^2}$$

$$= \frac{-2}{\omega^2 - 1} \cos\left(\omega \frac{\pi}{2}\right)$$

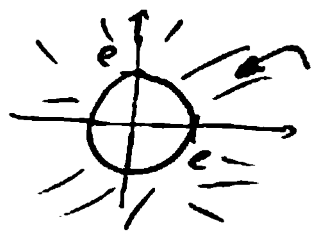
4a) $y_n = \cosh(n) = \dfrac{e^n + e^{-n}}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

(R5)

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \cdot \frac{1}{z^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{z^n} + \frac{e^{-n}}{z^n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{ez}\right)^n\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \left|\frac{e}{z}\right| < 1 \text{ und } \left|\frac{1}{ez}\right| < 1}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{e}{z}} + \frac{1}{1-\frac{1}{ez}}\right)$$

$\Rightarrow |z| > e$



Konvergenzbereich der Z-Transf.

4b) $a_n = 1$ und $b_n = 2$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$Z[a_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot \frac{1}{z^n} \underset{\substack{\uparrow \\ |z| > 1}}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

$$Z[b_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{z^n} \underset{\substack{\uparrow \\ |z| > 1}}{=} \frac{2}{1-\frac{1}{z}} = \frac{2z}{z-1}$$

$A(z) = Z[a_n](z) \cdot Z[b_n](z) = \dfrac{2z^2}{(z-1)^2}$ (linke Seite)

$$(a_k * b_k)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot 2 = 2(n+1) \quad n = 0, 1, 2$$

$$B(z) = Z[(a_k * b_k)_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) \frac{1}{z^n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}\right)' \cdot (-z^2)$$

$$\underset{|z|>1}{\overset{\uparrow}{=}} -2z^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} \right)' = -2z^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n} \right)'$$ (RG)

$$= -2z^2 \left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \right)' = -2z^2 \, \frac{-1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^2} \cdot \frac{1}{z^2}$$

$$= \frac{2z^2}{(z-1)^2}$$ (rechte Seite)

$\Rightarrow A(z) = B(z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

Der Konvergenzbereich von $Z[a_n](z)$ und $Z[b_n](z)$ ist $\{|z| > 1\}$. Wegen der Faltungsregel für die Z-Transf. muß für $|z|>1$ $A(z) = B(z)$ gelten!