Ⓥ - Musterlösung Oktober Klausur ITPDG SS2002

1) Bsp.: $y_n = 2^n \ , n = 0,1,2,\dots$

$$Z[y_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{z^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^n|} = 2 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{für } |z| > 2 \text{ konv.} \\ \text{für } |z| < 2 \text{ div.} \end{array}$$

2) Ind. Anfang für $n = 1$

z.z. $\mathcal{L}[e^{-t}](s) = \frac{1}{s+1}$

$$\mathcal{L}[e^{-t}](s) = \int_0^\infty e^{-t} e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-t(s+1)}\,dt = \frac{1}{s+1} \quad ✓$$

$Re(s) > -1$

Ind Voraussetzung

Für ein festes $K \in N$ gelte:

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{K-1} e^{-t}}{(K-1)!}\right](s) = \frac{1}{(s+1)^K}$$

Ind. Behauptung

Dann gilt für $K+1$

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^K e^{-t}}{K!}\right](s) = \frac{1}{(s+1)^{K+1}}$$

Ind. Beweis

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^K e^{-t}}{K!}\right](s) = \mathcal{L}\left[\frac{t}{K} \cdot \frac{t^{K-1} e^{-t}}{(K-1)!}\right](s)$$

(V)

$$= \frac{1}{k} \mathcal{L}\left[t \cdot \frac{t^{k-1} e^{-t}}{(k-1)!}\right](s)$$

$$= \frac{1}{k} \left(-\frac{d}{ds} \mathcal{L}\left[\frac{t^{k-1} e^{-t}}{(k-1)!}\right](s)\right)$$

$\uparrow$
Ableitung im Bildbereich

$$= \frac{1}{k}\left(-\frac{d}{ds} \frac{1}{(s+1)^k}\right) = \frac{1}{k} \cdot \left(-\frac{-k}{(s+1)^{k+1}}\right) = \frac{1}{(s+1)^{k+1}}$$

$\uparrow$
Ind.Vor.

Schluß auf alle $n \in \mathbb{N}$...

3) Ist f eine Schwartzfunktion so gilt nach der Ableitungsregel der Fouriertransformation:

$$F[f'(t)](\omega) = i\omega\, F[f(t)](\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F[f](\omega) = \int_{-3}^{3} 1 \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \frac{-1}{i\omega} e^{-i\omega t}\Big|_{-3}^{3} = \frac{-1}{i\omega}\left(e^{-3i\omega} - e^{3i\omega}\right)$$

$$= 2\,\frac{e^{3i\omega} - e^{-3i\omega}}{2i\omega} = \frac{2}{\omega} \sin(3\omega)$$

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{R} \setminus \{3,-3\} \\ \text{nicht def} & \text{für } t = 3 \text{ oder } t = -3 \end{cases}$$ f ist nicht stetig für $t = \pm 3$!

Nach dem Ableitungssatz müßte gelten

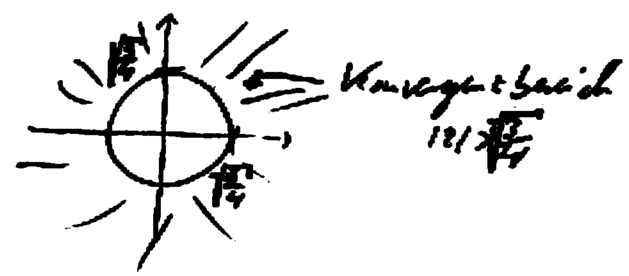
$$F[f'(t)](\omega) = i\omega \frac{2}{\omega} \sin(3\omega) = 2i \sin(3\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Andererseits müßte $F[f'(t)](\omega) = 0$ sein, da $f'(t) = 0$ gilt.
(bis auf $t = 3$ und $t = -3$)
Die Ableitungsregel kann nicht angewendet werden, da f in den Sprungstellen $t = 3$ und $t = -3$ nicht differenzierbar ist!

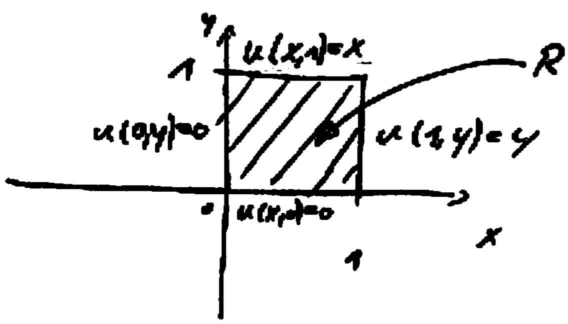
4) $$Z[y_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} \frac{1}{z^{2n}} = 1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^1 + \frac{3}{4} z^2 + 0 \cdot z^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 z^4 + \dots$$

$$\to y_n = \begin{cases} 0 & n = 2k+1 \\ \left(\frac{3}{4}\right)^k & n = 2k \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\right|} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$



5)



$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Lösung durch raten (scharfes Hinsehen)

$$u(x,y) = x \cdot y \qquad u_{xx} = u_{yy} = 0 \checkmark$$

V4

6) $f: [0,\infty[\to \mathbb{R}$ heißt von exponentieller Ordnung, wenn es Konstanten $C, \gamma \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $t \geq 0$ gilt:

$$|f(t)| \leq C \cdot e^{\gamma t}.$$

a) $f(t) = t^{10} \sin(t)$

$$|t^{10}\sin(t)| \leq |t^{10}| = 10!\,\frac{t^{10}}{10!} \leq 10! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

$$= 10!\, e^t \Rightarrow C = 10!,\ \gamma = 1$$

f ist von exponentieller Ordnung! ▽

b) $f(t) = \sinh(3t)$

$$|\sinh(3t)| = \left|\frac{e^{3t} - e^{-3t}}{2}\right| \leq \frac{e^{3t}}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2},\ \gamma = 3$$

f ist von exponentieller Ordnung ▽