Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 02/03

Prof. Dr. D. Ferus/Dr. D. Lehmann 19.2.2003

Februar – Klausur (Rechenteil)
Integraltransformationen und PDG's für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Ich **wünsche** den Aushang des Klausurergebnisses unter Angabe meiner Matr.–Nr. (ohne Namen) am Schwarzen Brett und im WWW.

....

Unterschrift

Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN-A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

Bei jeglichem Täuschungsversuch gilt die Klausur als **nicht** bestanden.

Die Lösung jeder Aufgabe ist in **Reinschrift** auf einem seperaten DIN-A4 Blatt abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe 10 Punkte

Lösen Sie mit der Laplace-Transformation das Anfangswertproblem

$$y'' + 4y = \sin x, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,.$$

2. Aufgabe 10 Punkte

Lösen Sie mit Hilfe eines Produktansatzes die Wellengleichung für die eindimensionale schwingende Saite

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,, \quad u = u(x,t), \quad (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}$$

zu den Randbedingungen

$$\begin{array}{rrcll} \text{Einspannbedingung} & u(0,t) = u(\pi,t) & = & 0 & \forall t \in \mathbb{R} \\ \text{Anfangsauslenkung} & u(x,0) & = & \sin(2x) + \sin(4x) & \forall x \in [0,\pi] \\ \text{Anfangsgeschwindigkeit} & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & \sin(3x) & \forall x \in [0,\pi] \end{array}$$

3. Aufgabe 10 Punkte

Es sei

$$f(t) := \begin{cases} \frac{\sin t}{2} & \text{falls } 0 \le t \le \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und für $a \in (0,\pi)$ und $\varepsilon > 0$

$$f_{a,\varepsilon}(t) := \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{t-a}{\varepsilon}\right)$$

a) Skizzieren Sie $f_{\frac{\pi}{2},\varepsilon}(t)$ für $\varepsilon = 1$, $1/2$ und $1/3$.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f}_{a,\varepsilon}(\omega) = \mathcal{F}[f_{a,\varepsilon}](\omega)$ für allgemeines a, ε.
Hinweis: $\int \sin ux\, e^{-ivx} dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{e^{-i(v-u)x}}{v-u} - \frac{e^{-i(v+u)x}}{v+u}\right\}$.

c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{\varepsilon\to 0} \hat{f}_{a,\varepsilon}(\omega)$.

4. Aufgabe 10 Punkte

Beweisen Sie die Entwicklungen

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} 2(-1)^k J_{2k+1}(x)\,, \qquad \cos x = J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^k J_{2k}(x)$$

indem Sie die erzeugende Funktion der Besselfunktionen an der Stelle $t = i$ betrachten. Beachten Sie, dass $J_{-\ell}(x) = (-1)^{\ell} J_{\ell}(x)$.