Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 02/03

Prof. Dr. D. Ferus/Dr. D. Lehmann 19.2.2003

Februar – Klausur (Verständnisteil)
Integraltransformationen und PDG's für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN-A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Bei jeglichem Täuschungsversuch gilt die Klausur als **nicht** bestanden.

Die Lösung jeder Aufgabe ist in **Reinschrift** auf einem seperaten DIN-A4 Blatt abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Die Laplacetransformierte der Funktion $f(t)$ sei $F(s)$. Was ist dann die Laplacetransformierte von

$$t^2\, f''(t) - f(3t)\, e^{-2t} + \int_0^t \cos(2t-2u)\, f(u)\, du\ ?$$

Vereinfachen Sie Ihr Resultat soweit wie möglich. (Ausdrücke wie $F(s)$, $sF(s)$ oder etwa $s^2F'(s)$ können Sie natürlich nicht weiter vereinfachen.)

2. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen. (Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte, für jede falsche Antwort werden 2 Punkte abgezogen, keine Antwort gibt 0 Punkte, bei negativer Gesamtpunktzahl wird die Aufgabe mit 0 Punkten gewertet.)

a) Die Laplacetransformierte von $f(t) = 1$ ist $F(s) = 1$.

b) Die Laplacetransformierte der Diracschen Deltafunktion $\delta_a(t)$ ist e^{-sa} für $a > 0$.

c) Die Fouriertransformierte von $f \cdot g$ ist gegeben durch $\hat{f} \cdot \hat{g}$, $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$.

d) Macht man für die PDG $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ den Separationsansatz $u(r\cos\phi, r\sin\phi, t) = R(r)\,\Phi(\phi)\,T(t)$, dann erhält man für den Winkelanteil $\Phi(\phi)$ die Besselsche Differentialgleichung.

e) Die Besselfunktion $J_0(x)$ hat unendlich viele Nullstellen.

3. Aufgabe

8 Punkte

Die Laplacetransformierte von $\cos(2t)$ ist $\mathcal{L}[\cos(2t)](s) = \frac{s}{s^2+4}$. Benutzen Sie dieses Resultat und ein geignetes Rechengesetz der Laplace-Transformation, um daraus $\mathcal{L}[\sin(2t)](s)$ zu berechnen.

4. Aufgabe

12 Punkte

Die Wellengleichung in 3 Raumdimensionen lautet $\Delta u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ mit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. In Kugelkoordinaten ist

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \cot\theta\,\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right\}$$

a) Machen Sie eine Skizze, in der der Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten (x, y, z) und den Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) deutlich wird. Wie lauten die analytischen Formeln, also $x = ..., y = ..., z = ...$?

b) Machen Sie den Separationsansatz $u(r, \theta, \phi, t) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)T(t)$. Welche Differentialgleichungen ergeben sich für R, Θ, Φ und T?