Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 03
Prof. Dr. D. Ferus/Dr. D. Lehmann 9.4.2003

April – Klausur (Rechenteil)
Integraltransformationen und PDG's für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Ich **wünsche** den Aushang des Klausurergebnisses unter Angabe meiner Matr.–Nr. (ohne Namen) am Schwarzen Brett und im WWW.

....
Unterschrift

Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN-A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

Bei jeglichem Täuschungsversuch gilt die Klausur als **nicht** bestanden.

Die Lösung jeder Aufgabe ist in **Reinschrift** auf einem seperaten DIN-A4 Blatt abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe 10 Punkte

Lösen Sie mit der Laplace-Transformation das Anfangswertproblem

$$y'' - 4y = \sinh x, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,.$$

2. Aufgabe 10 Punkte

Lösen Sie die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\tfrac{\partial u}{\partial t} = \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad u = u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$$

zu der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Betrachten Sie dazu die Funktion $\hat{u}(k,t) := \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, e^{-ikx} dx$ und leiten Sie eine DGL für $\hat{u}(k,t)$ her. Hinweis: $\mathcal{F}[e^{-\alpha\frac{x^2}{2}}](k) = \left(e^{-\alpha\frac{x^2}{2}}\right)^\wedge(k) = \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{k^2}{2}}$.

3. Aufgabe 10 Punkte

Es sei J_0 die nullte Besselfunktion und $F(s) = \mathcal{L}[J_0](s)$ die Laplace-Transformierte.

a) Zeigen Sie, dass $F(s)$ die Differentialgleichung

$$(s^2+1)F'(s) + sF(s) = 0 \tag{1}$$

löst, indem Sie die Besselsche Differentialgleichung für J_0, $xy''+y'+xy = 0$, Laplace-transformieren. Beachten Sie, dass $J_0(0) = 1$.

b) Berechnen Sie $F(s)$, indem Sie die DGL (1) lösen. Hinweis: $\int_0^\infty J_0(t)\,dt = 1$.

4. Aufgabe 10 Punkte

Beweisen Sie die Entwicklung

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)J_{2k+1}(x) = \frac{x}{2}$$

indem Sie die erzeugende Funktion der Besselfunktionen $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} J_\ell(x)t^\ell = e^{\frac{x}{2}(t-1/t)}$ nach t differenzieren. Beachten Sie, dass $J_{-\ell}(x) = (-1)^\ell J_\ell(x)$ und wählen Sie für t eine spezielle Zahl.