Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 03
Prof. Dr. D. Ferus/Dr. D. Lehmann 9.4.2003

April – Klausur (Verständnisteil)
Integraltransformationen und PDG's für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN-A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Bei jeglichem Täuschungsversuch gilt die Klausur als **nicht** bestanden.

Die Lösung jeder Aufgabe ist in **Reinschrift** auf einem seperaten DIN-A4 Blatt abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe
10 Punkte

Berechnen Sie die Laplacetransformierte von

$$t^2 \sin t - \cos(4t)\, e^{-2t} + \int_0^t \sin(3t-3u)\, \cos(u)\, du$$

2. Aufgabe
8 Punkte

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion, also $f(-t) = f(t)$, und es existiere sowohl die Laplace-Transformierte $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ als auch die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)$. Welcher Zusammenhang besteht dann zwischen F und $\hat{f}$?

3. Aufgabe
10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen. (Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte, für jede falsche Antwort werden 2 Punkte abgezogen, keine Antwort gibt 0 Punkte, bei negativer Gesamtpunktzahl wird die Aufgabe mit 0 Punkten gewertet.)

a) Ist $\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s+1}\mathcal{L}[g](s)$, dann ist $f(t) = e^{-t}g(t)$.

b) Die Fouriertransformierte von $\delta(t-1)$, wobei δ die Diracsche Deltafunktion ist, ist $\cos\omega - i\sin\omega$.

c) Die Fouriertransformierte einer geraden Funktion ist wieder eine gerade Funktion.

d) Macht man für die PDG $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ den Separationsansatz $u(r\cos\phi, r\sin\phi, t) = R(r)\,\Phi(\phi)\,T(t)$, dann erhält man für den Winkelanteil $\Phi(\phi)$ die Legendre Polynome $P_k(\cos\phi)$ als Lösungen.

e) Die Laplace-Transformierte von $J_1(x)$ existiert nicht, da J_1 nicht von exponentiellem Typ ist.

4. Aufgabe
12 Punkte

Die Wellengleichung in 3 Raumdimensionen (mit Geschwindigkeit 1) lautet $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ mit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. In Zylinderkoordinaten ist $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

a) Machen Sie eine Skizze, in der der Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten (x, y, z) und den Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) deutlich wird. Wie lauten die analytischen Formeln, also $x = ..., y = ..., z = ...$?

b) Machen Sie den Separationsansatz $u(r, \theta, \phi, t) = R(r)\Phi(\phi)Z(z)T(t)$ und leiten Sie Differentialgleichungen für R, Φ, Z und T her.

c) Bei geeigneter Wahl der Konstanten erhält man für den Radialteil die DGL

$$r^2 R'' + rR' + (\omega^2 r^2 - \ell^2)\, R = 0\,, \quad \omega, \ell \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Wie lauten die Lösungen von (2)? Für welche $\omega \in \mathbb{R}$ gibt es Lösungen von (2), die der Randbedingung $R(1) = 0$ genügen? Begründen Sie Ihre Antwort.