TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik
Dr. Frank Jochmann

SommerSemester 2003

1 Lösung zur Juli-Klausur (Rechenteil)

Aufgabe 1 L-Transformation in Dgl. ergibt mit dem Differentiationssatz und den Anfangsbedingungen :

$$0 \stackrel{!}{=} \mathcal{L}\left[y'' + 6y' + 5y\right](s) = \left(s^2 + 6s + 5\right)\mathcal{L}[y](s) - y'(0) - sy(0) - 6y(0)$$

$$\stackrel{!}{=} \left(s^2 + 6s + 5\right)\mathcal{L}[y](s) - (s+6) = (s+5)(s+1)\mathcal{L}[y](s) - (s+6)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}[y](s) = \frac{s+6}{(s+1)(s+5)}$$

$\boxed{\text{3 Punkte}}$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{s+6}{(s+1)(s+5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+5}$$

$$A = \frac{s+6}{s+5}|_{s=-1} = 5/4, \quad B = \frac{s+6}{s+1}|_{s=-5} = -1/4$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}[y](s) = \frac{5/4}{s+1} - \frac{1/4}{s+5}$$

$\boxed{\text{3 Punkte}}$

Rücktransformation:

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{5}{4}\mathcal{L}[\exp(-t)](s) - \frac{1}{4}\mathcal{L}[\exp(-5t)](s)$$

$$\Longrightarrow y(t) = \frac{5}{4}\exp(-t) - \frac{1}{4}\exp(-5t).$$

$\boxed{\text{4 Punkte}}$

Aufgabe 2 Sei

$$U(k,t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}[u(\cdot,t)](k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\exp(-ikx)dx$$

die Fouriertansformierte bzgl. x. Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(k,t) = \mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial t}u(\cdot,t)\right](k) \stackrel{!}{=} \mathcal{F}\left[2\frac{\partial}{\partial x}u(\cdot,t) - u(\cdot,t)\right](k)$$

Mit dem Differentiationssatz für die Fourier-Transformation folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}U(k,t) = (2ik-1)\mathcal{F}[u(\cdot,t)](k) = (2ik-1)U(k,t) \tag{1}$$

(Gewöhnliche Differentialgleichung in t.) $\boxed{\text{4 Punkte}}$

Aus der Anfangsbedingungen $u(x,0) = u_0(x) = \exp(-|x|)$ folgt:

$$U(k,0) = \mathcal{F}[u_0](k) = \mathcal{F}[\exp(-|\cdot|)](k)$$

$\boxed{\text{2 Punkte}}$

Mit **??** folgt somit:

$$U(k,t) = U(k,0)\exp((2ik-1)t) = \exp(-t)\mathcal{F}[u_0](k)\exp(2ikt)$$

Der Verschiebungssatz ergibt:

$$U(k,t) = \exp(-t)\mathcal{F}[u_0(\cdot + 2t)](k)$$

Rücktransformation ergibt:

$$u(x,t) = \exp(-t)u_0(x+2t) = \exp(-t)\exp(-|x+2t|).$$

$\boxed{\text{4 Punkte}}$

Aufgabe 3 Separationsansatz:

$$v(x,y) = f(x)g(y), \quad x \in (0,\pi), y \in (0,\pi)$$

Einsetzen in Dgl. ergibt: $\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} - 1 = 0$, und damit

$$g''(y) = (1+K)g(y) \text{ und } f''(x) = -Kf(x)$$

mit einer Konstanten K. Mit den Randbedingungen

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0$$

folgt

$$f(0) = f(\pi) \stackrel{!}{=} 0$$

$\boxed{\text{3 Punkte}}$

Im Falle $K \geq 0$ lautet die allgemeine Lösung der Dgl. für f:

$$f(x) = A\cos(\sqrt{K}x) + B\sin(\sqrt{K}x)$$

insbesondere

$$f(0) = A \stackrel{!}{=} 0 \text{ und } f(\pi) = A\cos(\sqrt{K}\pi) + B\sin(\sqrt{K}\pi) \stackrel{!}{=} 0.$$

Dies ist erfüllt für $A = 0$ und $\sin(\sqrt{K}\pi) = 0$, d.h. $\sqrt{K} = n \in \mathbb{N}$. Im Fall $K < 0$ ergibt sich nur die triviale Lösung $v = 0$.

Für g ergibt sich nun: $g''(y) = (1+n^2)g(y)$ mit der allgemeinen Lösung

$$g(y) = C\cosh\left([1+n^2]^{1/2}y\right) + D\sinh\left([1+n^2]^{1/2}y\right)$$

Aus der Randbedingung $u(x,0) = 0$ folgt $C = g(0) = 0$.

Wir erhalten somit als Lösungen der Dgl. mit den homogenen RB:

$$v_n(x,y) = \sin(nx) \cdot \sinh\big([1+n^2]^{1/2}y\big), \quad n \in I\!N.$$

$\boxed{\text{3 Punkte}}$

Ansatz für u durch Überlagerung

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx) \cdot \sinh\big([1+n^2]^{1/2}y\big).$$

Zu bestimmen sind die Koeffizienten α_n. Aus der Randbedingung $u(x,\pi) = \sin(5x)$ folgt

$$u(x,\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx) \cdot \sinh\big([1+n^2]^{1/2}\pi\big) \stackrel{!}{=} \sin(5x)$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\alpha_5 \sinh([26]^{1/2}\pi) = 1, \text{ sonst } \alpha_n = 0,$$

und damit

$$u(x,y) = \big[\sinh([26]^{1/2}\pi)\big]^{-1} \sin(5x) \cdot \sinh\big([26]^{1/2}y\big), \quad x,y \in [0,\pi].$$

$\boxed{\text{4 Punkte}}$

Aufgabe 4 Sei

$$\varphi(r\cos\phi, r\sin\phi) \stackrel{\text{def}}{=} J_0(2r) \text{ für } r \in (0,\infty), \phi \in [0,2\pi].$$

Dann gilt:

$$\Delta\varphi(r\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} J_0(2r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} J_0(2r) = \frac{1}{r^2}\left[(2r)^2 J_0''(2r) + (2r)J_0'(2r)\right].$$

Da J_0 die Besselsche Dgl. zum Index 0 löst, folgt

$$(2r)^2 J_0''(2r) + (2r)J_0'(2r) = -(2r)^2 J_0(2r),$$

und somit

$$\Delta\varphi(r\cos\phi, r\sin\phi) = -4J_0(2r) = -4\varphi(r\cos\phi, r\sin\phi).$$

$\boxed{\text{3 Punkte}}$

Einsetzen des Ansatzes in Dgl.ergibt:

$$a'(t)\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) \stackrel{!}{=} \Delta u(x,t) + t\varphi(x) = a(t)\Delta\varphi(x) + t\varphi(x) = [t - 4a(t)]\varphi(x),$$

und damit

$$a'(t) + 4a(t) = t \text{ und } a(0) = 0$$

wegen der Anfangsbedingungen. $\boxed{\text{4 Punkte}}$

Dieses AWP hat die Lösung

$$a(t) = \frac{1}{16}\exp(-4t) - \frac{1}{16} + \frac{t}{4}.$$

$\boxed{\text{3 Punkte}}$