Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 03
Jochmann 28. Juli 2003

Juli – Klausur (Verständnisteil)
ITPDG für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

11 Punkte

Sei $u : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Es gelte

$$\mathcal{F}[u(\cdot, 0)](k) = \exp(-k^2).$$

Bestimmen Sie damit die Fourier-Transformierte von u bzgl. x gegeben durch

$$U(k,t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}[u(\cdot, t)](k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) \exp(-ikx) dx.$$

2. Aufgabe

8 Punkte

Kreuzen Sie an(Begründung nicht erforderlich):

1) Für die Fourier-Transformation gilt die Rechenregel

$$(\mathcal{F}[f])'(k) = \mathcal{F}[f'])(k).$$

richtig ◯ falsch ◯

2) Für jede stückweise stetige Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ von exponentieller Ordnung ist die Laplace-Transformierte (auf einer Halbebene) definiert.

richtig ◯ falsch ◯

3) Für die N-dimensionale Fouriermatrix $F_N \in \mathbb{C}^{N \times N}$ gilt:

$$F_N \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ w \\ w^2 \\ . \\ . \\ . \\ w^{N-1} \end{pmatrix}.$$

Hier ist $w \stackrel{\text{def}}{=} \exp(2\pi i/N)$.

richtig ◯ falsch ◯

4) Sei $y : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + 2y = f, \quad y(0) = 1.$$

Dann gilt für die Laplace-Transformierte von y:

$$(s+2)\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[f](s).$$

richtig ◯ falsch ◯

Hinweis : Für jedes richtige Kreuz erhalten Sie zwei Punkte. Für jedes falsche Kreuz werden zwei Punkte abgezogen, bei negativer Gesamtpunktzahl wird die Aufgabe mit null Punkten gewertet.

3. Aufgabe

10 Punkte

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte von

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} t^{3/2} \exp(-3t)$$

unter Verwendung von

$$\mathcal{L}[t^{-1/2}](s) = \pi^{1/2} s^{-1/2}, \qquad \text{Re}\,\{s\} > 0.$$

4. Aufgabe

11 Punkte

Sei R das zweidimensionale Rechteck $R \stackrel{\text{def}}{=} (0,\pi) \times (0,\pi)$. Eigenfunktionen für das Eigenwertproblem

$$\Delta\varphi(x) = -\lambda^2 \varphi(x), \quad x = (x_1, x_2) \in R \text{ und } \varphi(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \partial R$$

sind gegeben durch:

$$\varphi_{j,k}(x_1, x_2) = \sin(jx_1)\sin(kx_2) \text{ und } j, k \in \mathbb{N}, \quad x_1 \in (0,\pi), x_2 \in (0,\pi).$$

i) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda^2_{j,k}$ an.

ii) Sei $F : R \to \mathbb{C}$ gegeben durch eine (verallgemeinerte) Fourierentwicklung nach den Eigenfunktionen $\varphi_{j,k}$:

$$F(x_1, x_2) = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{j,k} \varphi_{j,k}(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in (0,\pi).$$

Bestimmen Sie damit eine Reihendarstellung der Lösung u des folgenden Rand-Anfangswertproblems:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - u, \quad x = (x_1, x_2) \in R, t > 0,$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen

$$u(x, 0) = F(x), \quad x \in R \text{ und } u(x,t) = 0, \quad x \in \partial R, t > 0.$$