TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik
Dr. Frank Jochmann SommerSemester 2003

1 Lösung zur Juli-Klausur (Verständnisteil)

Aufgabe 1 Fourier-Transformation bzgl.x in Dgl. ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(k,t) = \mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial t}u(\cdot,t)\right](k) = -\mathcal{F}\left[\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(\cdot,t)\right](k)$$

(3 Punkte)

Mit dem Differentiationssatz folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(k,t) = -k^4\mathcal{F}\left[u(\cdot,t)\right](k) = -k^4U(k,t).$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung (1.Ordnung) bzgl. t. Ihre Lösung lautet:

$$U(k,t) = U(k,0)\exp\left(-tk^4\right)$$

(5 Punkte)

Mit

$$U(k,0) = \mathcal{F}\left[u(\cdot,0)\right](k) = \exp\left(-k^2\right)$$

folgt:

$$U(k,t) = \exp\left(-k^2\right)\exp\left(-tk^4\right) = \exp\left(-k^2 - tk^4\right)$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2 1) falsch, 2)richtig, 3)richtig, 4)falsch.

Aufgabe 3 Mit dem Differentiationssatz für die Laplace-Transformation folgt

$$\mathcal{L}[t^{3/2}](s) = \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}[t^{-1/2}](s) = \pi^{1/2}\frac{d^2}{ds^2}s^{-1/2} = \pi^{1/2}\frac{3}{4}s^{-5/2}.$$

(6 Punkte)

Mit dem Dämpfungssatz folgt:

$$\mathcal{L}[t^{3/2}\exp\left(-3t\right)](s) = \mathcal{L}[t^{3/2}](s+3) = \pi^{1/2}\frac{3}{4}(s+3)^{-5/2}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4 i) Es gilt:

$$\Delta\varphi_{j,k}(x_1,x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\sin\left(jx_1\right)\sin\left(kx_2\right)\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\sin\left(jx_1\right)\sin\left(kx_2\right)\right)$$

$$= -\lambda_{j,k}^2\varphi_{j,k}(x_1,x_2) \text{ mit } \lambda_{j,k}^2 = j^2 + k^2$$

für alle $j, k \in I\!N$. $\boxed{\text{(2 Punkte)}}$

ii) Ansatz für u (verallgem. Fourierentwicklung) :

$$u(x_1, x_2, t) = \sum_{j,k=1}^{\infty} b_{j,k}(t)\varphi_{j,k}(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in (0, \pi), t > 0.$$

Zu bestimmen sind die Koeffizienten $b_{j,k}(t)$. $\boxed{\text{(2 Punkte)}}$

Einsetzen in Dgl.:

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} b'_{j,k}(t)\varphi_{j,k}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial t}u(x_1, x_2, t) \stackrel{!}{=} \Delta u(x_1, x_2, t) - u(x_1, x_2, t)$$

$$= \sum_{j,k=1}^{\infty} b_{j,k}(t)[\Delta\varphi_{j,k}(x_1, x_2) - \varphi_{j,k}(x_1, x_2)] = -\sum_{j,k=1}^{\infty} b_{j,k}(t)[\lambda_{j,k}^2 + 1]\varphi_{j,k}(x_1, x_2)]$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$b'_{j,k}(t) = -[1 + \lambda_{j,k}^2]b_{j,k}(t) \text{ für alle } j, k \in I\!N.$$

und damit

$$b_{j,k}(t) = b_{j,k}(0)\exp\left(-[1 + \lambda_{j,k}^2]t\right) \text{ für alle } j, k \in I\!N.$$

$\boxed{\text{(4 Punkte)}}$

Mit der Anfangsbedingung $u(x, 0) = F(x)$ folgt:

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} b_{j,k}(0)\varphi_{j,k}(x_1, x_2) = u(x_1, x_2, 0) \stackrel{!}{=} F(x_1, x_2) = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{j,k}\varphi_{j,k}(x_1, x_2)$$

$$\Longrightarrow b_{j,k}(t) = b_{j,k}(0)\exp\left(-[1 + \lambda_{j,k}^2]t\right) = a_{j,k}\exp\left(-[1 + \lambda_{j,k}^2]t\right) \text{ für alle } j, k \in I\!N,$$

und somit

$$u(x_1, x_2, t) = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{j,k}\exp\left(-[1 + \lambda_{j,k}^2]t\right)\varphi_{j,k}(x_1, x_2)$$

$$= \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{j,k}\exp\left(-[1 + j^2 + k^2]t\right) \cdot \sin(jx_1) \cdot \sin(kx_2), \quad x_1, x_2 \in (0, \pi), t > 0.$$

$\boxed{\text{(3 Punkte)}}$

Allgemein gilt(siehe VL und Übung): Eigenfunktionen für ein Rechteck mit den Seitenlängen L_1, L_2:

$$\varphi_{j,k}(x_1,x_2) = \sin\left(\frac{j\pi}{L_1}x_1\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L_2}x_2\right) \text{ für } j,k \in I\!N, \text{ und } x_1 \in (0,L_1), x_2 \in (0,L_2).$$

für ein Rechteck mit den Seitenlängen L_1, L_2:

$$\Delta\varphi_{j,k} = -\lambda_{j,k}^2\varphi_{j,k}$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_{j,k}^2 = \pi^2\left(\frac{j^2}{L_1^2} + \frac{k^2}{L_2^2}\right) \text{ für alle } j,k \in I\!N.$$

(verallgem.) Fourierentwicklung von $f : R \to \mathbb{C}$:

$$f(x_1,x_2) = \sum_{j,k=1}^{\infty} \alpha_{j,k}\varphi_{j,k}(x_1,x_2), \quad x_1 \in (0,L_1), x_2 \in (0,L_2),$$

wobei

$$\alpha_{j,k} = \|\varphi_{j,k}\|_{L^2}^{-2}\langle f, \varphi_{j,k}\rangle_{L_2}$$
$$= \frac{4}{L_1L_2}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2} f(x_1,x_2)\sin\left(\frac{j\pi}{L_1}x_1\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L_2}x_2\right)dx_1dx_2.$$